# 目　录

# 第1章

# 完全信息静态博弈

在本章中，我们讨论如下简单形式的博弈：开始时由参与者同时选择行动，然后根据所有参与者的选择，每个参与者得到各自的结果（一定的收益或支出）。在此类静态（即各方同时行动）的博弈中，我们的分析又仅限于完全信息博弈的情况，即每一参与者的收益函数（根据所有参与者选择行动的不同组合决定某一参与者收益的函数）在所有参与者之间是共同知识（common knowledge）。我们在本书的第2章和第4章讨论动态（即序贯行动）博弈，在本书的第3章和第4章分析不完全信息博弈（博弈中的一些参与者不知道其他参与者的收益函数，如拍卖中每一人都不清楚其他人到底愿意为拍卖品出多高的价格）。

在第1.1节首先介绍博弈论入门的两个最基本问题：如何描述一个博弈问题以及如何求得博弈问题的解。我们定义博弈的标准式表述和严格劣战略的概念，并说明有些博弈问题只要运用理性参与者绝不会使用严格劣战略这一原则，就可得到解决，但此原则在其他博弈问题中也可能出现非常不精确的预测（像任何结果都有可能发生之类）。接着，我们引出纳什均衡的概念并给出定义——这一概念的用途很广，对很多类型的博弈都能作出较为严格的预测。

在第1.2节我们运用前面介绍的工具，分析其四个应用模型：古诺（Cournot, 1838）的不完全竞争模型，贝特兰德（Bertrand, 1883）的不完全竞争模型，法伯（Farber, 1980）的最后要价仲裁和公共财产问题（休谟（Hume），1739年提出了此类问题，以后又不断被经济学家提出讨论）。在每一应用例子中，我们先把问题的非标准描述转化为博弈的标准式，其后再解出该博弈的纳什均衡。（上面每一例子都存在惟一的纳什均衡，但我们讨论的范围却不限于此。）

在第1.3节重回理论分析。首先我们定义混合战略（Mixed strategy），它可理解为一个参与者并不能确定其他参与者将会如何行动，然后引出并

讨论纳什定理,该定理保证了在非常广泛的博弈类型中都存在着纳什均衡(也许会是混合战略均衡)。由于我们在第1.1节介绍了最基本的理论,在第1.2节安排了应用举例,最后在第1.3节又给出了更进一步的理论内容,显然,在第1.3节中更深入的理论探讨,对第1.2节例子的理解并不是必须的前提,混合战略的概念和均衡的存在性在以后各章中都时有提及。

本章及其后各章后面均附有习题、建议以及进一步的阅读资料及参考文献目录。

# 1.1 基础理论:博弈的标准式和纳什均衡

## 1.1.A 博弈的标准式表述

在博弈的标准式表述中,每一参与者同时选择一个战略,所有参与者选择战略的组合决定了每个参与者的收益。我们借一个经典的例子说明博弈的标准式——囚徒困境。两个犯罪嫌疑人被捕并受到指控,但除非至少一个人招认犯罪,警方并无充足证据将其按罪判刑。警方把他们关入不同牢室,并对他们说明不同行动带来的后果。如果两人都不坦白,将均被判为轻度犯罪,入狱一个月;如果双方都坦白招认,都将被判入狱6个月;最后,如果一人招认而另一人拒不坦白,招认的一方将马上获释,而另一人将判入狱9个月——所犯罪行6个月,干扰司法加判3个月。

囚徒面临的问题可用下图所示的双变量矩阵表来描述。(正如同一个矩阵一样,双变量矩阵可由任意多的行和列组成,"双变量"指的是在两个参与者的博弈中,每一单元格有两个数字——分别表示两个参与者的收益)

| | | 囚徒 2 | |
|---|---|---|---|
| | | 沉默 | 招认 |
| 囚徒 1 | 沉默 | −1, −1 | −9, 0 |
| | 招认 | 0, −9 | −6, −6 |

囚徒的困境

在此博弈中,每一囚徒有两种战略可供选择:坦白(或招认)、不坦白(或沉默),在一组特定的战略组合被选定后,两人的收益由上图双变量矩阵中相应单元的数据所表示。习惯上,横行代表的参与者(此例中为囚徒1)的收益在两个数字中放前面,列代表的参与者(此例为囚徒2)的收益置于其后。

这样，如果囚徒1选择沉默，囚徒2选择招认，囚徒1的收益就是－9(代表服刑9个月)，囚徒2的收益为0(代表马上开释)。

现在我们回到一般情况。博弈的标准式表述包括：(1)博弈的参与者，(2)每一参与者可供选择的战略集，(3)针对所有参与者可能选择的战略组合，每一个参与者获得的收益。我们后面将经常讨论到 $n$ 个参与者的博弈，其中参与者从1到 $n$ 排序，设其中任一参与者的序号为 $i$，令 $S_i$ 代表参与者 $i$ 可以选择的战略集合(称为 $i$ 的战略空间)，其中任意一个特定的战略用 $s_i$ 表示(有时我们写成 $s_i \in S_i$ 表示战略 $s_i$ 是战略集 $S_i$ 中的要素)。令 $(s_1, \cdots, s_n)$ 表示每个参与者选定一个战略形成的战略组合，$u_i$ 表示第 $i$ 个参与者的收益函数，$u_i(s_1, \cdots, s_n)$ 即为参与者选择战略 $(s_1, \cdots, s_n)$ 时第 $i$ 个参与者的收益。将上述内容综合起来，我们得到：

**定义**　在一个 $n$ 人博弈的标准式表述中，参与者的战略空间为 $S_1, \cdots, S_n$，收益函数为 $u_1, \cdots, u_n$，我们用 $G = \{S_1, \cdots, S_n; u_1, \cdots, u_n\}$ 表示此博弈。

尽管我们曾提到在博弈的标准式中，参与者是同时选择战略的，但这并不意味着各方的行动也必须是同时的：只要是每一参与者在选择行动时不知道其他参与者的选择就足够了，像上例中牢里分开关押的囚徒可以在任何时间作出他们的选择。更进一步，尽管在本章中博弈的标准式只用来表示参与者行动时不清楚他人选择的静态博弈，但在第2章中我们就会看到标准式也可用来表示序贯行动的博弈，只不过另一种变通的方式——博弈的扩展式表述更为常用，它在分析动态问题时也更为方便。

### 1.1.B　重复剔除严格劣战略

上节已讲过一个博弈的表述方法，下面开始介绍如何着手分析一个博弈论问题。我们从囚徒的困境这个例子开始，因为它较为简单，只需用到理性的参与者不会选择严格劣战略这一原则。

在囚徒的困境中，如果一个嫌疑犯选择了招认，那么另一人也会选择招认，被判刑6个月，而不会选择沉默从而坐9个月的牢；相似地，如果一个嫌疑犯选择沉默，另一人还是会选择招认，这样会马上获释，而不会选择沉默在牢里渡过一个月。这样，对第 $i$ 个囚徒讲，沉默相比招认来说是劣战略——对囚徒 $j$ 可以选择的每一战略，囚徒 $i$ 选择沉默的收益都低于选择招认的收益。(对任何双变量矩阵，上例中的收益的具体数字0，－1，－6，

-9 换成任意的 $T$、$R$、$P$、$S$，只要满足 $T>R>P>S$，上述结论依然成立。）更为一般地：

**定义** 在标准式的博弈 $G=\{S_1,\cdots,S_n;u_1,\cdots,u_n\}$中，令 $s_i'$ 和 $s_i''$ 代表参与者 $i$ 的两个可行战略（即 $s_i'$ 和 $s_i''$ 是 $S_i$ 中的元素）。如果对其他参与者每一个可能的战略组合，$i$ 选择 $s_i'$ 的收益都小于其选择 $s_i''$ 的收益，则称战略 $s_i'$ 相对于战略 $s_i''$ 是严格劣战略：

$$u_i(s_1,\cdots,s_{i-1},s_i',s_{i+1},\cdots,s_n)<u_i(s_1,\cdots,s_{i-1},s_i'',s_{i+1},\cdots,s_n). \tag{DS}$$

对其他参与者在其战略空间 $S_1,\cdots,S_{i-1},S_{i+1},\cdots,S_n$ 中每一组可能的战略 $(s_1,\cdots,s_{i-1},s_{i+1},\cdots,s_n)$ 都成立。

理性的参与者不会选择严格劣战略，因为他（对其他人选择的战略）无法作出这样的推断，使这一战略成为他的最优反应。[①] 这样，在囚徒的困境中，一个理性的参与人会选择招认，于是（招认，招认）就成为两个理性参与者的结果，尽管（招认，招认）带给双方的福利都比（沉默，沉默）要低。囚徒的困境的例子还有很多应用，我们将在第 2 章和第 4 章讨论它的变型。现在，我们来看理性参与者不选择严格劣战略这一原则是否能解决其他博弈问题。

| | | 参与人 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 左 | 中 | 右 |
| 参与人 1 | 上 | 1,0 | 1,2 | 0,1 |
| | 下 | 0,3 | 0,1 | 2,0 |

图 1.1.1

考虑图 1.1.1 所示抽象博弈的例子，[②] 参与人 1 有两个可选战略，参与人 2 有 3 个可选战略：$S_1=\{$上，下$\}$，$S_2=\{$左，中，右$\}$。对参与人 1 来讲，上和下都不是严格占优的：如果 2 选择左，上优于下（因为 $1>0$），但如 2

---

① 相应的逆命题也很有趣：如果某一参与者（对其他参与者选择的战略）无法作出这样的推断，从而使战略 $s_i$ 成为他的最优反应，我们能否得到结论，一定存在另一战略是 $s_i$ 的严格占优战略？答案是肯定的。前提是对“推断”和“另一战略”的正确理解，两者都涉及到将在第 1.3.A 节中介绍的混合战略。

② 本书的绝大多数例子都取自经济学的实际应用，而很少使用纯数字的抽象例子，这不仅因为应用本身往往饶有趣味，还因为应用经常是解释理论的较好方式。不过在说明一些基本的理论原理时，我们有时也求助于没有现实经济含义的抽象例子。

选择右，下就会优于上(因为2>0)。但对参与人2来讲，右严格劣于中(因为2>1且1>0)，因此理性的参与人2是不会选择右的。那么，如果参与人1知道参与人2是理性的，他就可以把右从参与人2的战略空间中剔除，即如果参与人1知道参与人2是理性的，他就可以把图1.1.1所示博弈视同为图1.1.2所示博弈：

| | | 参与人2 | |
|---|---|---|---|
| | | 左 | 中 |
| 参与人1 | 上 | 1,0 | 1,2 |
| | 下 | 0,3 | 0,1 |

图1.1.2

在图1.1.2中，对参与人1来讲，下就成了上的严格劣战略，于是如果参与人1是理性的(并且参与人1知道参与人2是理性的，这样才能把原博弈简化为图1.1.2)，参与人1就不会选择下。那么，如果参与人2知道参与人1是理性的，并且参与人2知道参与人1知道参与人2是理性的(从而参与人2知道原博弈将会简化为图1.1.2所示博弈)，参与人2就可以把下从参与人1的战略空间中剔除，余下图1.1.3所示博弈。但这时对参与人2，左又成为中的严格劣战略，仅剩的(上，中)就是此博弈的结果。

| | | 参与人2 | |
|---|---|---|---|
| | | 左 | 中 |
| 参与人1 | 下 | 0,3 | 0,1 |

图1.1.3

上面的过程可称为“重复剔除严格劣战略”。尽管此过程建立在理性参与人不会选择严格劣战略这一合情近理的原则之上，它仍有两个缺陷：第一，每一步剔除都需要参与者间相互了解的更进一步假定，如果我们要把这一过程应用到任意多步，就需要假定“参与者是理性的”是共同知识。这意味着，我们不仅需要假定所有参与人是理性的，还要假定所有参与人都知道所有参与人是理性的，还需要假定所有参与人都知道所有参与人都知道所有参与人是理性的，如此等等，以至无穷(关于共同知识的正式定义参见奥曼(Aumann, 1976))。

重复剔除严格劣战略的第二个缺陷在于这一方法对博弈结果的预测经常是不精确的。例如，在1.1.4中的博弈中，就没有可以剔除的严格劣战略。(由于没有现实事件作为基础，这一博弈可能会被认为是随意编制或不

合逻辑的，为此我们还可以参考1.2.A中经济学应用部分反映同一实质的3个及更多企业的古诺模型）既然所有战略都经得住对严格劣战略的重复剔除，该方法对分析博弈将出现什么结果毫无帮助。

| | 左 | 中 | 右 |
|---|---|---|---|
| 上 | 0,4 | 4,0 | 5,3 |
| 中 | 4,0 | 0,4 | 5,3 |
| 下 | 3,5 | 3,5 | 6,6 |

图 1.1.4

下面我们介绍纳什均衡，它是一种博弈的解的概念，可以对非常广泛类型的博弈作出严格得多的预测。我们通过参与者的纳什均衡战略绝不会在重复剔除严格劣战略的过程中被剔除掉，而重复剔除劣战略后所留战略却不一定满足纳什均衡战略的条件，来证明纳什均衡是一个比重复剔除严格劣战略要强的解的概念。以后各章我们还将证明在扩展式的博弈中，甚至纳什均衡对博弈结果的预测也可能是不精确的，从而还需要定义条件更为严格的均衡概念。

### 1.1.C 纳什均衡的导出和定义

导出纳什均衡的途径之一，是证明如果博弈论还可以为博弈问题提供一个惟一解，此解一定是纳什均衡，原因如下。设想在博弈论预测的博弈结果中，给每个参与者选定各自的战略，为使该预测是正确的，必须使参与者自愿选择理论给他推导出的战略。这样，每一参与者要选择的战略必须是针对其他参与者选择战略的最优反应，这种理论推测结果可以叫做“战略稳定”或“自动实施”的，因为没有参与人愿意独自离弃他所选定的战略，我们把这一状态称为纳什均衡。

**定义** 在 $n$ 个参与者标准式博弈 $G=\{S_1,\cdots,S_n;u_1,\cdots,u_n\}$ 中，如果战略组合 $\{s_1^*,\cdots,s_n^*\}$ 满足对每一参与者 $i$，$s_i^*$ 是（至少不劣于）他针对其他 $n-1$ 个参与者所选战略 $\{s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*\}$ 的最优反应战略，则称战略组合 $\{s_1^*,\cdots,s_n^*\}$ 是该博弈的一个纳什均衡。即：

$$u_i(s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*)\geq u_i(s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*)\,. \qquad \text{(NE)}$$

对所有 $S_i$ 中的 $s_i$ 都成立，亦即 $s_i^*$ 是以下最优化问题的解：

$$\max_{s_i \in S_i} u_i\{s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*\}\ .$$

为把该定义和开始提到的推导思路联系起来，设想有一标准式博弈 $G=\{S_i,\cdots,S_n;u_1,\cdots,u_n\}$，博弈论为它提供的解为战略组合 $\{s_1',\cdots,s_n'\}$，如果 $\{s_1',\cdots,s_n'\}$ 不是 $G$ 的纳什均衡，就意味着存在一些参与人 $i$，$s_i'$ 不是针对 $\{s_1',\cdots,s_{i-1}',s_{i+1}',\cdots,s_n'\}$ 的最优反应战略，即在 $S_i$ 中存在 $s_i''$，使得：

$$u_i(s_1',\cdots,s_{i-1}',s_i',s_{i+1}',\cdots,s_n')<u_i(s_1',\cdots,s_{i-1}',s_i'',s_{i+1}',\cdots,s_n')\ .$$

那么，如果博弈论提供的战略组合解 $\{s_1',\cdots,s_n'\}$ 不是纳什均衡，则至少有一个参与者有动因偏离理论的预测，使得博弈真实进行和理论预测不一致。和纳什均衡推导密切相关的是协议的理念：对给定的博弈，如果参与者之间要商定一个协议决定博弈如何进行，那么一个有效的协议中的战略组合必须是纳什均衡的战略组合，否则，至少有一个参与人会不遵守该协议。

为更准确地理解这一概念，下面求解几个例题。考虑前面已描述过的三个标准式博弈——囚徒的困境、图 1.1.1 和图 1.1.4。寻找博弈纳什均衡的一个最直接办法就是简单查看每一个可能的战略组合是否符合定义中不等式(NE)的条件。[①] 在两人博弈中，这一方法开始的程序如下：对每一个参与者，并且对该参与者每一个可选战略，确定另一参与者相应的最优战略。图 1.1.5 中，就把图 1.1.4 所示博弈作了上述处理，对参与者 $i$ 的每一个可选战略，在参与者 $j$ 使用最优反应战略时的收益下面划了横线。例如，如果列参与人选择左，行参与人的最优战略将会是中(因为 4 比 3 和 0 都要大)，于是我们在双变量矩阵(中，左)单元内行参与人的收益“4”下划一条横线。

| | 左 | 中 | 右 |
|---|---|---|---|
| 上 | 0,4 | 4,0 | 5,3 |
| 中 | 4,0 | 0,4 | 5,3 |
| 下 | 3,5 | 3,5 | 6,6 |

图 1.1.5

如果在一对战略中，每一参与人的战略都是对方战略的最优反应战略，

① 在第 1.3.A 节中，我们将区分纯战略和混合战略，那时我们就会看到此处所给的纳什均衡定义是指纯战略均衡，但有时也可能有混合战略均衡存在。除非有明确说明，本节所说纳什均衡都是指纯战略均衡。

则这对战略满足不等式(NE)的条件(亦即双变量矩阵相应单元的两个收益值下面都被划了横线)。这样,(下,右)是惟一一对满足(NE)的战略组合。同样的过程可得到囚徒困境中的战略组合(招认,招认)、图 1.1.1 中的战略组合(上,中)。这些战略组合就是各自博弈中惟一的纳什均衡。[①]

下面我们重点分析纳什均衡和重复剔除严格劣战略均衡的关系。我们已经看到,囚徒困境和图 1.1.1 中的纳什均衡——分别为(招认,招认)和(上,中)——正是经过重复剔除严格劣战略后仅剩的战略组合。这一结果可总结为:如果用重复剔除严格劣战略把除战略组合$\{s_1^*,\cdots,s_n^*\}$外所有的战略组合都剔除掉,则该所存战略组合就是此博弈惟一的纳什均衡(参见在附录 1.1.C 中这一结论的证明)。不过,由于重复剔除严格劣战略并不经常会只剩下惟一的战略组合,纳什均衡作为比重复剔除严格劣战略更强的解的概念,自然受到更多关注,理由如下。如果战略组合$\{s_1^*,\cdots,s_n^*\}$是一个纳什均衡,它一定不会被重复剔除严格劣战略所剔除(同样参见附录中的证明),但也可能有重复剔除严格劣战略无法剔除的战略组合,其本身却和纳什均衡一点儿关系都没有。为理解这一点,请想一下图 1.1.4 所示博弈,纳什均衡给出了惟一解(下,右),但重复剔除严格劣战略却给出了最大不确定性的预测:没有任何战略组合被剔除,什么结果都有可能出现。

证明了纳什均衡是一个比重复剔除严格劣战略条件更强的解的概念之后,我们还必须解决一个问题,就是纳什均衡作为博弈解的概念,条件是否太强了,即我们能否确定纳什均衡一定是存在的?纳什(1950)证明了在任何有限博弈(即参与者 $n$ 和战略集 $S_1,\cdots,S_n$ 都是有限的博弈)中,都存在至少一个纳什均衡(这一均衡可能包含了混合战略,我们将在 1.3.A 中讨论,并参见 1.3.B 中关于纳什定理的精确表述)。古诺(1838)在双头垄断模型这一特定的环境中提出了同样的均衡概念,并通过构造的方法证明了模型中均衡的存在性(参见第 1.2.A 节)。在本书的每一个应用分析中,我们都将沿袭古诺的思路:即将通过构造一个纳什均衡(或条件更强的均衡)的方法,证明均衡本身的存在性。不过在一些理论章节中,也有直接依据纳什定理(或条件更强时的类似定理),简单断定均衡存在的情况。

我们用另一经典例子作为本节小结——性别战博弈。这一例子表明一个博弈可以有多个纳什均衡,并且在第 1.3.B 和第 3.2.A 节讨论混合战略时也用得到。关于这一博弈的传统表述(要知道这一博弈从 20 世纪 50 年

---

① 这一结论即使在不限于纯战略的条件下也同样成立,因为在这些战略中不存在混合战略纳什均衡。参见习题 1.10。

代就开始使用了),是一男一女试图决定安排一个晚上的娱乐内容,我们分析这一博弈的中性版本。不在同一地方工作的帕特和克里斯必须就去听歌剧和看职业拳击赛选择其一,帕特和克里斯都希望两人能在一起渡过一个夜晚,而不愿分开,但帕特更希望能一起看拳击比赛,克里斯则希望能在一起欣赏歌剧,如下面双变量矩阵所示:

| | | 帕特 | |
|---|---|---|---|
| | | 歌剧 | 拳击 |
| 克里斯 | 歌剧 | 2,1 | 0,0 |
| | 拳击 | 0,0 | 1,2 |

性别战博弈

(歌剧,歌剧)和(拳击,拳击)都是纳什均衡。

以上我们论证了如果博弈论可以为一个博弈提供惟一解,此解一定是一个纳什均衡。这一命题没有提及博弈论不能提供惟一解的可能情况。同时还论证了如果参与者之间能就如何进行给定的博弈达成一个协议,该协议也一定是一个纳什均衡,但这一命题同样没有考虑不能达成协议的可能情况。在一些有多个纳什均衡的博弈中,有一个均衡比其他均衡明细占优(后面各章的主要理论内容就是找出不同类型博弈的这种占优均衡),这时,多个纳什均衡的存在本身也不会引出其他问题。不过,在上面讲的性别战博弈中,(歌剧,歌剧)和(拳击,拳击)又难分优劣,这说明博弈论对有些博弈并不能提供惟一解,参与者间也不能就该博弈的进行达成协议。[①] 在这样的博弈中,纳什均衡用于预测博弈将如何进行的作用就大大减弱了。

## 附录 1.1.C

本附录是关于 1.1.C 提到的两个命题的证明,跳过这些证明对以后内容的理解不会有很大影响。不过,对于不太谙熟正规定义及证明操作的读者,掌握这些证明程序也是一种有益的训练。

**命题 A** 在 $n$ 个参与者的标准式博弈 $G=\{S_1,\cdots,S_n;u_1,\cdots,u_n\}$ 中,

① 在第1.3.B节中,我们将描述性别战博弈的第三个纳什均衡(含有混合战略)。不同于(歌剧,歌剧)和(拳击,拳击)的是,该第三均衡有对称的收益——正如在对称博弈中存在惟一均衡的情况一样;另一方面,该第三均衡仍是无效率的,因为它的导出违背了协议的原则。不过,无论我们对性别战博弈中的纳什均衡如何评判,上面的命题仍是成立的:即存在博弈论无法惟一解、并无法达成协议的博弈。

如果重复剔除严格劣战略剔除掉除战略组合$\{s_1^*, \cdots, s_n^*\}$外的所有战略，那么这一战略组合为该博弈惟一的纳什均衡。

**命题 B** 在 $n$ 个参与者的标准式博弈 $G=\{S_1, \cdots, S_n; u_1, \cdots, u_n\}$中，如果战略$\{s_1^*, \cdots, s_n^*\}$是一个纳什均衡，那么它不会被重复剔除严格劣战略所剔除。

由于命题 B 的证明比较简单，我们先用它作一个热身。论证使用反证法，即我们先假定一个纳什均衡解在重复剔除严格劣战略的过程中被剔除掉了，然后证明如果该假定成立，就会有自相矛盾的结果出现，从而证明假定本身是错误的。

设想战略$\{s_1^*, \cdots, s_n^*\}$是标准式博弈 $G=\{S_1, \cdots, S_n; u_1, \cdots, u_n\}$的一个纳什均衡，但同时假定(也许在剔除掉$\{s_1^*, \cdots, s_n^*\}$之外的一些战略之后)在$\{s_1^*, \cdots, s_n^*\}$中，$s_i^*$ 首先称为应被剔除的严格劣战略，那么 $S_i$ 中一定存在尚未被剔除的战略 $s_i''$ 严格优于 $s_i^*$。代入公式(DS)，我们得到

$$u_i(s_1, \cdots, s_{i-1}, s_i^*, s_{i+1}, \cdots, s_n) < u_i(s_1, \cdots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \cdots, s_n). \tag{1.1.1}$$

对每一个其他参与者尚未被剔除的战略空间中可能形成的战略组合$(s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_n)$都成立。由于 $s_i^*$ 是均衡战略中第一个被剔除的战略，均衡战略中其他参与人的战略尚未被剔除，于是作为(1.1.1)的一个特例，下式成立

$$u_i(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i'', s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*). \tag{1.1.2}$$

但是(1.1.2)和公式(NE)是矛盾的：根据(NE)，$s_i^*$ 必须是针对$(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*)$的最优反应，那么就不可能存在一个战略 $s_i''$ 严格优于 $s_i^*$。这一矛盾证明了原命题成立。

证明过命题 B，我们事实上已经证明了命题 A 的一部分：所有需要证明的只是如果重复剔除严格劣战略剔除了除$\{s_1^*, \cdots, s_n^*\}$之外的所有战略，该战略是纳什均衡，根据命题 B，任何其他的纳什均衡必定同样未被剔除，这已证明了在该博弈中均衡的惟一性。我们假设 $G$ 是有限博弈。

论证同样使用反证法。假定通过重复剔除严格劣战略剔除掉除$\{s_1^*, \cdots, s_n^*\}$外的所有战略，但该战略不是纳什均衡。那么一定有某一参与者 $i$ 在他的战略集 $S_i$ 中存在 $s_i$，使公式(NE)不成立，但 $s_i$ 又必须是在剔除过程

某一阶段的严格劣战略。上述两点的正规表述为:在 $S_i$ 中存在存在 $s_i$,使

$$u_i(s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*)<u_i(s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*)\quad, \tag{1.1.3}$$

并且在参与者 $i$ 的战略集中存在 $s_i'$,在剔除程序中的某一阶段

$$u_i(s_1,\cdots,s_{i-1},s_i,s_{i+1},\cdots,s_n)<u_i(s_1,\cdots,s_{i-1},s_i',s_{i+1},\cdots,s_n)\ . \tag{1.1.4}$$

对所有其他参与者在该阶段剩余战略可能的战略组合($s_1,\cdots,s_{i-1},s_{i+1},\cdots,s_n$)都成立。由于其他参与者的战略($s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*$)始终未被剔除,于是下式作为(1.1.4)的一个特例成立

$$u_i(s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*)<u_i(s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_i',s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*)\ . \tag{1.1.5}$$

如果 $s_i'=s_i^*$(即 $s_i^*$ 是$s_i$ 的严格占优战略),则1.1.5和1.1.3相互矛盾,这时证明结束。如果 $s_i'\neq s_i''$,由于 $s_i'$ 在最终被剔除掉了,则一定有其他战略 $s_i''$ 在其后严格优于$s_i'$。这样,在不等式(1.1.4)和(1.1.5)中,分别用 $s_i'$ 和$s_i''$ 换下 $s_i$ 和$s_i'$ 后仍然成立。再一次,如果 $s_i''=s_i^*$ 则证明结束,否则,还可构建两个相似的不等式。由于 $s_i^*$ 是$S_i$ 中惟一未被剔除的战略,重复这一论证过程(在一个有限的博弈中)最终一定能完成证明。

## 1.2 应用举例

### 1.2.A 古诺的双头垄断模型

正如前节已提到的,古诺(1838)早在一个多世纪之前就已提出了纳什所定义的均衡(但只是在特定的双头垄断模型中)。古诺的研究现在已理所当然地成为博弈论的经典文献之一,同时也是产业组织理论的重要里程碑。这里,我们只讨论古诺模型的一种非常简单的情况,并在以后每章中都会涉及到这一模型的不同变型。本节我们将通过模型说明:(a)如何把对一个问题的非正式描述转化为一个博弈的标准式表述;(b)如何通过计算解出博弈的纳什均衡;(c)重复剔除严格劣战略的步骤。

令 $q_1$、$q_2$ 分别表述企业1、2生产的同质产品的产量,市场中该产品的总供给 $Q=q_1+q_2$,令 $P(Q)=a-Q$ 表示市场出清时的价格(更为精确一些的表述为:$Q<a$ 时,$P(Q)=a-Q$;$Q>a$ 时,$P(Q)=0$)。设企业 $i$ 生

产 $q_i$ 的总成本 $C_i(q_i)=cq_i$，即企业不存在固定成本，且生产每单位产品的边际成本为常数 $c$，这里我们假定 $c<a$。根据古诺的假定，两个企业同时进行产量决策[①]。

为求出古诺博弈中的纳什均衡，我们首先要将其化为标准式的博弈。前节已讲过，博弈的标准式表述包含下列要素：(1)博弈的参与人，(2)每一参与人可以选择的战略，(3)针对每一个可能出现的参与人的战略组合，每一参与人的收益。双头垄断模型中当然只有两个参与人，即模型中的两个垄断企业。在古诺的模型里，每一企业可以选择的战略是其产品产量，我们假定产品是连续可分割的。由于产出不可能为负，每一企业的战略空间就可表示为 $S_i=[0,\infty)$，即包含所有非负实数，其中一个代表性战略 $s_i$ 就是企业选择的产量，$q_i\geq 0$。也许有的读者提出特别大的产量也是不可能的，因而不应包括在战略空间之中，不过，由于 $Q\geq a$ 时，$P(Q)=0$，任一企业都不会有 $q_i>a$ 的产出。

要全面表述这一博弈并求其均衡解，还需把企业 $i$ 的收益表示为它自己和另一企业所选择战略的函数。我们假定企业的收益就是其利润额，这样在一般的两个参与者标准式博弈中，参与者 $i$ 的收益 $u_i(s_i,s_j)$ 就可写为：[②]

$$\pi_i(q_i,q_j)=q_i[p(q_i+q_j)-c]=q_i[a-(q_i+q_j)-c] .$$

上节我们讲过，在一个标准式的两人博弈中，一对战略 $(s_1^*,s_2^*)$ 如是纳什均衡，则对每个参与者 $i$，$s_i^*$ 应该满足

$$u_i(s_i^*,s_j^*)\geq u_i(s_i,s_j^*) . \qquad \text{(NE)}$$

上式对 $S_i$ 中每一个可选战略 $s_i$ 都成立，这一条件等价于：对每个参与者 $i$，$s_i^*$ 必须是下面最优化问题的解：

$$\max_{s_i\in S_i} u_i(s_i,s_j^*) .$$

---

① 企业不选择产出而选择价格的贝特兰德模型(1883)，我们将在第1.2.B节进行讨论；企业选择产量，但一个企业先选，并可被另一企业观察到的斯塔克尔贝里模型(1934)我们将在第2.1.B节介绍。最后，在第2.3.C中我们还要讨论弗里德曼(Friedman, 1971)的模型，其中古诺模型中两个企业的相互影响多次重复发生。

② 请注意这里我们的表示有一个小的变化，使用 $u_i(s_i,s_j)$ 而非 $u_i(s_1,s_2)$，两者都表示参与者 $i$ 的收益是所有参与者所选择战略组合的函数。后面(及在类似的 $n$ 人博弈中)我们将穿插使用这两种表示方法。

在古诺的双头垄断模型中，上面的条件可具体表述为：一对产出组合$(q_1^*, q_2^*)$若为纳什均衡，对每一个企业$i$，$q_i^*$应为下面最大化问题的解：

$$\max_{0 \le q_i \le \infty} \pi_i(q_i, q_j^*) = \max_{0 \le q_i \le \infty} q_i[a - (q_i + q_j^*) - c] .$$

设$q_j^* < a - c$（下面将证明该假设成立），企业$i$最优化问题的一阶条件既是必要条件，又是充分条件；其解为

$$q_i = \frac{1}{2}(a - q_j^* - c) . \tag{1.2.1}$$

那么，如果产量组合$(q_1^*, q_2^*)$要成为纳什均衡，企业的产量选择必须满足：

$$q_1^* = \frac{1}{2}(a - q_2^* - c)$$

且

$$q_2^* = \frac{1}{2}(a - q_1^* - c) .$$

解这一对方程组得

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3} ,$$

均衡解的确小于$a - c$，满足上面的假设。

对这一均衡的直观理解非常简单。每一家企业当然都希望成为市场的垄断者，这时它会选择$q_i$使自己的利润$\pi_i(q_i, 0)$最大化，结果其产量将为垄断产量$q_m = (a - c)/2$并可赚取垄断利润$\pi_i(q_i, 0) = (a - c)^2/4$。在市场上有两家企业的情况下，要使两企业总的利润最大化，两企业的产量之和$q_1 + q_2$应等于垄断产量$q_m$，比如$q_i = q_m/2$时就可满足这一条件。但这种安排存在一个问题，就是每一家企业都有动机偏离它：因为垄断产量较低，相应的市场价格$p(q_m)$就比较高，在这一价格下每家企业都会倾向于提高产量，而不顾这种产量的增加会降低市场出清价格（为更清楚地理解这一点，参见图1.2.1，并检验当企业1的产量为$q_m/2$时，企业2的最佳产量并不是$q_m/2$）。在古诺的均衡解中，这种情况就不会发生，两企业的总产量要更高一些，相应地使价格有所降低。习题1.4是关于$n$个寡头垄断企业的情况，垄断企业一方面希望提高产量，但又不愿因此而使市场出清价格下降，请分析这相互矛盾的两方面是如何取得均衡的。

如果认为代数方式解纳什均衡过于抽象，难以理解，我们还可以通过图形求解，方法如下。等式(1.2.1)给出的是针对企业 $j$ 的均衡战略 $s_j^*$ 时企业 $i$ 的最优反应，同样的方法我们可以推导出针对企业1的任意一个战略企业2的最优反应，和针对企业2任意一个战略企业1的最优反应。假定企业1的战略 $q_1$ 满足 $q_1 < a - c$，企业2的最优反应为

$$R_2(q_1) = \frac{1}{2}(a - q_1 - c) ,$$

类似地，如果 $q_2 < a - c$，则企业1的最优反应为

$$R_1(q_2) = \frac{1}{2}(a - q_2 - c) .$$

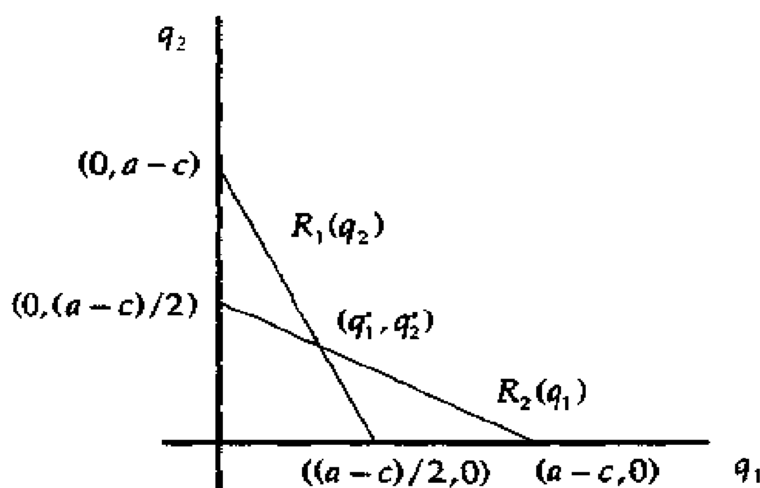



图 1.2.1

如图1.2.1所示，这两个最优反应函数只有一个交点，其交点就是最优产量组合$(q_1^*, q_2^*)$。

求解纳什均衡还有第三种方法，即运用重复剔除严格劣战略。在本例中，这一程序只得到惟一解——根据附录1.1.C中的命题A，一定为纳什均衡解$(q_1^*, q_2^*)$。完整的过程需要无限次剔除，每一步都从两个企业剩余的战略空间内剔除一个区间，我们在这里只讨论前两步。第一步，垄断产量 $q_m = (a - c)/2$ 严格优于其他任何更高的产量，即对任意 $x > 0$，$\pi_i(q_m, q_j) > \pi_i(q_m + x, q_j)$ 对任意的 $q_j \geq 0$ 都成立。证明如下：如果 $Q = q_m + x + q_j < a$，那么

$$\pi_i(q_m, q_j) = \frac{a - c}{2}\left[\frac{a - c}{2} - q_j\right]$$

且

$$\pi_i(q_m + x, q_j) = \left[\frac{a-c}{2} + x\right]\left[\frac{a-c}{2} - x - q_j\right]$$
$$= \pi_i(q_m, q_j) - x(x + q_j)$$

并且如果 $Q = q_m + x + q_j \geq a$，则 $P(Q) = 0$，生产较低的产出就会提高利润。第二步，在高于 $q_m$ 的产量被剔除后，产量 $(a-c)/4$ 严格优于任何更低的产量，即对任意在 0 到 $(a-c)/4$ 之间的 $x$，$\pi_i[(a-c)/4, q_j] > \pi_i[(a-c)/4 - x, q_j]$ 对任意在 0 到 $(a-c)/2$ 之间的 $q_j$ 都成立，证明如下：

$$\pi_i\left(\frac{a-c}{4}, q_j\right) = \frac{a-c}{4}\left[\frac{3(a-c)}{4} - q_j\right]$$

且

$$\pi_i\left(\frac{a-c}{4} - x, q_j\right) = \left[\frac{a-c}{4} - x\right]\left[\frac{3(a-c)}{4} + x - q_j\right]^{*}$$
$$= \pi_i(q_m, q_j) - x\left[\frac{a-c}{2} + x - q_j\right].$$

经过以上两步剔除，每一企业选择产量的战略空间只剩下了 $(a-c)/4$ 到 $(a-c)/2$ 之间的区间。重复上面的过程可以把剩余战略空间限制得越来越小。到达极限时，这一区间就成为一个点 $q_i^* = (a-c)/3$。

重复剔除严格劣战略的方法也可以用图形来描述，这要用到我们前面的一个观察结论（附注 1，同时参见 1.3.A 中的讨论）：当且仅当对其他参与者的战略，无法作出这样的推断，使某一战略成为最优反应战略，该战略为严格劣战略。由于本模型只有两个企业，我们可以将这一结论化为：当且仅当没有任何 $q_j$ 可使 $q_i$ 成为企业 $i$ 的最优反应战略时，$q_i$ 为严格劣战略。我们仍只讨论重复剔除过程的前两步。第一，对企业 $i$ 而言，生产超过垄断产量 $q_m = (a-c)/2$ 永远不会是最优反应。我们以企业 2 的最优反应函数为例来证明这一点：在图 1.2.1 中，当 $q_1 = 0$ 时，$R_2(q_1)$ 等于 $q_m$，且随 $q_1$ 的增加而递减。即对任意的 $q_j \geq 0$，如果企业 $i$ 相信企业 $j$ 将选择 $q_j$，企业 $i$ 的最优反应就必然小于或等于 $q_m$；不存在这样的 $q_j$，使 $i$ 的最优反应超过 $q_m$。

---

* 原文如此，似有误，应为

$$\pi_i\left(\frac{a-c}{4} - x, q_j\right) = \left[\frac{a-c}{4} - x\right]\left[\frac{3(a-c)}{4} + x - q_j\right]$$
$$= \pi_i\left(\frac{a-c}{4}, q_j\right) - x\left[\frac{a-c}{2} + x - q_j\right]$$

——译注

第二,已知企业 $j$ 产量的上限,我们可以导出企业 $i$ 最优反应的下限:如果 $q_j \leq (a-c)/2$,则有 $R_i(q_j) \geq (a-c)/4$,如图 1.2.2 所示企业 2 的最优反应。[①]

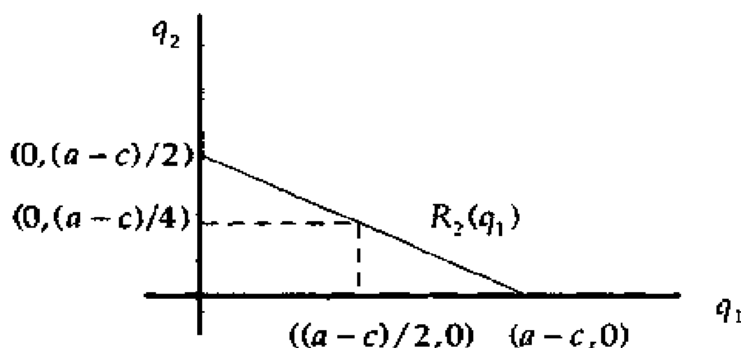



图 1.2.2

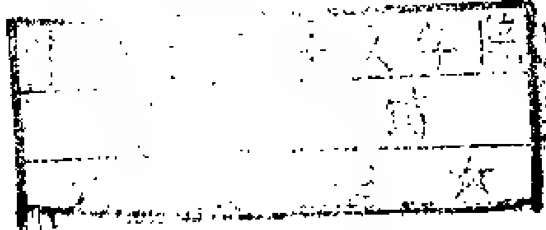
和上面相似,重复这一剔除过程就会得到单一的产量 $q_i^* = (a-c)/3$。

为总结本节内容,我们把古诺模型稍作变动,使重复剔除严格劣战略的程序不能得到惟一解。要做到这一点,只需在上面的双头垄断模型中加入一个或更多的企业。我们将会发现讨论双头垄断时的前两步中,第一步依然成立,但是这一过程也只能中止于此了。也就是说,当企业数目多于两个时,重复剔除严格劣战略只能得到非常不精确的预测,即每个企业的产出不会超过垄断条件下的产量。(这与图 1.1.4 非常类似,在那里这一方法不能剔除掉任何战略。)

为严谨起见,我们考虑 3 个企业的例子。令 $Q_{-i}$ 表示除 $i$ 之外的企业选择的产出之和,并令 $\pi_i(q_i, Q_{-i}) = q_i(a - q_i - Q_{-i} - c)$),且 $q_i + Q_{-i} < a$(因为如果 $q_i + Q_{-i} \geq a$,则 $\pi_i(q_i, Q_{-i}) = -cq_i$),这时垄断产出 $q_m = (a-c)/2$ 严格优于任何更高的产量。即对任意 $x > 0$,$\pi_i(q_m, Q_{-i}) > \pi_i(q_m + x, Q_{-i})$ 对所有 $Q_{-i} \geq 0$ 都成立。这和双头垄断条件下的第一步完全相同。不过,由于除 $i$ 之外还有两个企业,而 $q_j$ 和 $q_k$ 都在 0 到 $(a-c)/2$ 之间,我们对 $Q_{-i}$ 所能作的惟一界定就是在 0 和 $a-c$ 之间。这也意味着对企业 $i$ 而言,任何 $q_i \geq 0$ 都不是严格劣战略,因为对在 0 到 $(a-c)/2$ 间的任意 $q_i$,都存在相应的在 0 到 $a-c$ 间的 $Q_{-i}$(具体地说,$Q_{-i} = a - c -$

---

① 这两步证明都有一点儿不完整,因为我们没有考虑当企业 $i$ 拿不准 $q_j$ 时的最优反应。设想企业 $i$ 不清楚 $q_j$ 但相信 $q_j$ 的期望值为 $E(q_j)$。因为 $\pi_i(q_i, q_j)$ 对于 $q_j$ 是线性的,这种条件下企业 $i$ 不确定 $q_j$ 时的最优反应简单等于它确定企业 $j$ 将选择 $E(q_j)$ 时的最优反应——书中已有这样的例子。





$2q_i$)，使 $q_i$ 成为企业 $i$ 针对 $Q_{-i}$ 的最优反应战略。从而就无法再对其余战略空间做进一步剔除。

### 1.2.B　贝特兰德的双头垄断模型

下面我们讨论双头垄断中两个企业相互竞争的另一模型。贝特兰德(1883)提出企业在竞争时选择的是产品价格，而不像古诺模型中选择产量。首先应该明确贝特兰德模型和古诺模型是两个不同的博弈，这一点十分重要：参与者的战略空间不同，收益函数不同，并且(随后就可清楚地看到)在两个模型的纳什均衡中，企业行为也不同。一些学者分别用古诺均衡和贝特兰德均衡来概括所有这些不同点，但这种提法有时可能会导致误解：它只表示古诺和贝特兰德博弈的差别，以及两个博弈中均衡行为的差别，而不是博弈中使用的均衡概念不同。在两个博弈中，所用的都是上节我们定义的纳什均衡。

我们考虑两种有差异的产品(产品完全相同的情况参见习题 1.7)。如果企业 1 和企业 2 分别选择价格 $p_1$ 和 $p_2$，消费者对企业 $i$ 的产品的需求为：

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j \quad ,$$

其中 $b>0$，即只限于企业 $i$ 的产品为企业 $j$ 产品的替代品的情况(这个需求函数在现实中并不存在，因为只要企业 $j$ 的产品价格足够高，无论企业 $i$ 要多高的价格，对其产品的需求都是正的。后面将会讲到，只有在 $b<2$ 时问题才有意义)。和前面讨论过的古诺模型相似，我们假定企业生产没有固定成本，并且边际成本为常数 $c$，$c<a$，两个企业是同时行动(选择各自的价格)的。

和上节相同，要寻找纳什均衡首先需要把对问题的叙述化为博弈的标准式。参与者仍为两个，不过这里每个企业可以选择的战略是不同的价格，而不再是其产品产量。我们假定小于 0 的价格是没有意义的，但企业可选择任意非负价格——比方说用便士标价的商品，并无最高的价格限制。这样，每个企业的战略空间又可以表示为所有非负实数 $S_i=[0,\infty)$，其中企业 $i$ 的一个典型战略 $s_i$ 是所选择的价格 $p_i \geq 0$。

我们仍假定每个企业的收益函数等于其利润额，当企业 $i$ 选择价格 $p_i$，其竞争对手选择价格 $p_j$ 时，企业 $i$ 的利润为：

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)[p_i - c] = [a - p_i + bp_j][p_i - c] \ .$$

那么，价格组合$(p_1^*, p_2^*)$若是纳什均衡，对每个企业$i$，$p_i^*$应是以下最优化问题的解：

$$\max_{0\leq p_i<\infty} \pi_i(p_i, p_j^*) = \max_{0\leq p_i<\infty} [a - p_i + bp_j^*][p_i - c].$$

对企业$i$求此最优化问题的解为

$$p_i^* = \frac{1}{2}(a + bp_j^* + c).$$

由上可知，如果价格组合$(p_1^*, p_2^*)$为纳什均衡，企业选择的价格应满足

$$p_1^* = \frac{1}{2}(a + bp_2^* + c) \text{和} p_2^* = \frac{1}{2}(a + bp_1^* + c).$$

解这一对方程式得：

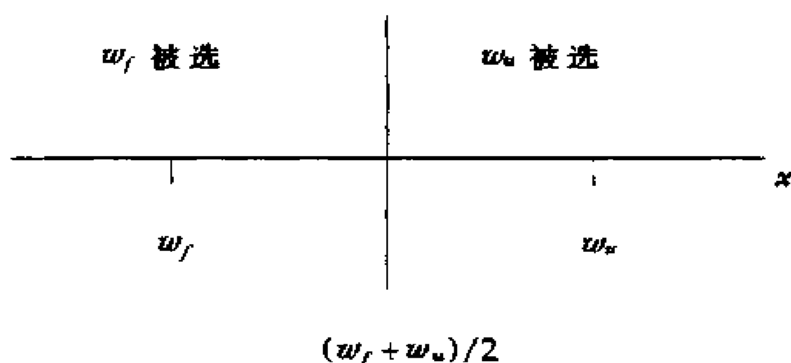
$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b}.$$

### 1.2.C 最后要价仲裁

许多公共部门的职工是不允许罢工的，这时，有关工资的分歧通过具有约束力的仲裁解决。(棒球联合会在主要的机制上更满足这一条件，但在经济上的重要性就差多了)很多其他争议，包括医疗事故、股票持有人对其股票经纪人的投诉等，也多通过仲裁解决。较为重要的仲裁形式有两类：协议仲裁和最后要价仲裁。在最后要价仲裁中，争议双方各自就工资水平要价，仲裁人选择其中之一作为仲裁结果；在协议仲裁中，与之不同的是，仲裁人可自由选定任意工资水平作为仲裁结果。本节我们根据法伯(1982)的研究，导出在最后要价仲裁模型处于纳什均衡时，博弈双方对工资水平的要价。[①]

假定参与争议的双方一为企业，一为工会，争议由工资而起。博弈进行的时序如下。第一步，企业和工会同时开出自己希望的工资水平，分别用$w_f$和$w_u$表示。第二步，仲裁人在二者之中选择其一作为结果。(与许多被称为静态的博弈相似，它其实属于将在第2章讨论的动态博弈，只不过这里我们通过对仲裁者第二步行为的假定，将其简化为企业和工会之间的静态博弈)假定仲裁人本身对工资水平有自己认为合理的方案，用$x$来表示这一理想值，进一步假定在观测到双方要价$w_f$和$w_u$后，仲裁人只是简单

① 这一应用中将涉及一些基本的概率论概念：累计概率分布、概率密度函数和期望值。需要时我们会给出简单的定义和解释；详细资料请查阅任何一种介绍概率论的教材。




$(w_f+w_u)/2$

图 1.2.3

选择距 $x$ 最为接近的要价：设若 $w_f < w_u$（这与我们的直觉一致，后面将会证明它是成立的），如果 $x < (w_f + w_u)/2$，仲裁者将选择 $w_f$；如果 $x > (w_f + w_u)/2$，则选择 $w_u$，参见图 1.2.3。（至于 $x = (w_f + w_u)/2$ 的情况出现时，选择哪一个都无关紧要，不妨设仲裁者掷硬币决定）仲裁者知道 $x$，但参与双方都不知道，他们相信 $x$ 是一个随机变量，其累积分布函数为 $F(x)$，相应的概率密度函数为 $f(x)$①。根据我们对仲裁者行为的假定，如果双方的要价分别为 $w_f$ 和 $w_u$，那么双方推断 $w_f$ 被选中的概率 Prob{$w_f$ 被选}和 $w_u$ 被选中的概率 Prob{$w_u$ 被选}分别表示为：

$$\text{Prob}\{w_f \text{ 被选}\} = \text{Prob}\{x < \frac{w_f + w_u}{2}\} = F(\frac{w_f + w_u}{2})$$

且

$$\text{Prob}\{w_u \text{ 被选}\} = 1 - F(\frac{w_f + w_u}{2}) .$$

据此，期望的工资水平为

$$\begin{aligned} & w_f \cdot \text{Prob}\{w_f \text{ 被选}\} + w_u \cdot \text{Prob}\{w_u \text{ 被选}\} \\ & = w_f \cdot F(\frac{w_f + w_u}{2}) + w_u \cdot \left[1 - F(\frac{w_f + w_u}{2})\right] . \end{aligned}$$

我们假定企业的目标是使期望工资最小化的仲裁结果，工会则设法使其最大化。若双方的要价 $(w_f^*, w_u^*)$ 是这一企业和工会间博弈的纳什均

① 即，$x$ 小于任意值 $x^*$ 的概率可表示为 $F(x^*)$，并且对 $x^*$，导出上面分布的概率密度为 $f(x^*)$。由于 $F(x^*)$ 是一个概率，所以对任意 $x^*$ 都有 $0 \le F(x^*) \le 1$。还有，如果 $x^{**} > x^*$，则 $F(x^{**}) \ge F(x^*)$，于是对任何 $x^*$，$f(x^*) \ge 0$。

衡，$w_f^*$ 必须满足：[①]

$$\min_{w_f} w_f \cdot F\left(\frac{w_f + w_u^*}{2}\right) + w_u^* \cdot \left[1 - F\left(\frac{w_f + w_u^*}{2}\right)\right]$$

且 $w_u^*$ 必须满足：

$$\max_{w_u} w_f^* \cdot F\left(\frac{w_f^* + w_u}{2}\right) + w_u \cdot \left[1 - F\left(\frac{w_f^* + w_u}{2}\right)\right].$$

从而，双方对工资的要价组合$(w_f^*, w_u^*)$必须满足上面最优化问题的一阶条件，为：

$$(w_u^* - w_f^*) \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{w_f^* + w_u^*}{2}\right) = F\left(\frac{w_f^* + w_u^*}{2}\right)$$

及

$$(w_u^* - w_f^*) \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{w_f^* + w_u^*}{2}\right) = \left[1 - F\left(\frac{w_f^* + w_u^*}{2}\right)\right].$$

(后面我们再讨论上面一阶条件的充分性)由于这两个一阶条件的等号左边完全相同，其右边也应该相等，这意味着

$$F\left(\frac{w_f^* + w_u^*}{2}\right) = \frac{1}{2}, \tag{1.2.2}$$

即，双方要价的平均值一定等于仲裁者偏好方案的中值。把(1.2.2)代入任何两个一阶条件之一可得

$$w_u^* - w_f^* = \frac{1}{f\left(\frac{w_f^* + w_u^*}{2}\right)} \tag{1.2.3}$$

它表示双方要价之差等于仲裁者偏好方案中值点概率密度的倒数。

为更好地从直观上理解这一比较静态结果，下面我们考虑一个具体例子。设仲裁者的偏好方案遵从期望值为 $m$，方差 $\sigma^2$ 的正态分布，密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - m)^2\right\}.$$

(在此例中，我们还可以证明前面给出的一阶条件同时也是充分条件。)因为正态分布在其期望值两侧的分布是对称的，因此其中值等于其期望值 $m$。这时(1.2.2)就成为

---

① 下面在建立和求解企业与工会的最优化条件时，我们假定企业的出价总低于工会的要价。其后，我们将会证明这一假定的正确性。

$$\frac{w_f^* + w_u^*}{2} = m \quad ,$$

且(1.2.3)成为

$$w_u^* - w_f^* = \frac{1}{f(m)} = \sqrt{2\pi\sigma^2} \ .$$

于是,纳什均衡的要价为

$$w_u^* = m + \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$$

和

$$w_f^* = m - \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} \ .$$

这里,双方的均衡要价以仲裁者偏好方案的期望值(即 $m$)为中心对称,且要价之差随双方对仲裁者偏好方案不确定性(即 $\sigma^2$)的提高而增大。

对这一均衡结果的直观理解也很简单,博弈的每一方都需进行权衡,一个更为激进的要价(即工会更高的要价或企业更低的出价)一旦被仲裁者选中就会给自己带来更高的收益,但其被选中的可能性却会相应降低(在第 3 章第 1 节蜡封出价拍卖中我们还会看到相似的得失权衡:较低的价格如果中标就会获得更好的收益,但却会减少中标的机会)。当对仲裁者偏好方案的不确定程度增加(即 $\sigma^2$ 变大)时,双方的要价之所以能更为激进,是因为一个更激进的价格与仲裁者偏好方案有较大差别的可能性变小了。相反,如果几乎不存在任何不确定性,双方都不敢开出一个离期望值很远的要价来,因为仲裁者选择离 $m$ 最近的方案的可能性非常大。

### 1.2.D　公共财问题

至迟从休谟(1739)开始,政治哲学和经济学家已经认识到如果公民只关注个人福利,公共物品就会出现短缺,并且公共资源也会过度使用。今天,只要随便看一下地球的环境,就能体会到这一观念的力量。哈丁(Hardin, 1968)被广为引用的论文使这一问题引起了非经济学者的关注。在此,我们分析牧场的例子。

考虑一个有 $n$ 个村民的村庄,每年夏天,所有村民都在村庄公共的草地上放牧。用 $g_i$ 表示村民 $i$ 放养羊的头数,则村庄里羊的总头数 $G = g_1 + \cdots + g_n$。购买和照看一只羊的成本为 $c$,$c$ 不随一户村民拥有羊的数目多少而变化。当草地上羊的总头数为 $G$ 时,一个村民养一只羊的价值为 $v(G)$。由于一只羊要生存,至少需要一定数量的青草,草地可以

放牧羊的总数有一个上限 $G_{max}$：当 $G<G_{max}$时，$v(G)>0$；但 $G\geq G_{max}$时，$v(G)=0$。还有，由于最初的一些羊有充足的空间放牧，再加一只不会对已经放养的羊产生太大影响，但当草地上放养羊的总数已多到恰好只能维生的时候（即 $G$ 恰好等于$G_{max}$时），再增加一只就会对其他已经放养的羊带来极大损害。用公式表述为：对，$G<G_{max}$，$v(G)<0$，且 $v''(G)<0$，如图 1.2.4 所示。

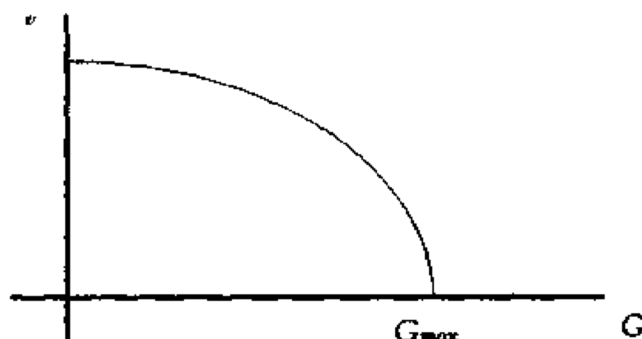



图 1.2.4

春天时，村民同时选择计划放养的羊的数量。假定羊是连续可分割的，村民 $i$ 的一个战略就是他选择的在村庄草地上放养羊的数量，$g_i$。假设战略空间为$[0,\infty)$，它包含了可以给村民带来收益的所有可能选择；$[0,G_{max})$其实也足够了。当其他村民养羊数量为$(g_1,\cdots,g_{i-1},g_{i+1},\cdots,g_n)$时，村民 $i$ 放养 $g_i$ 只羊获得的收益为

$$g_i\cdot v(g_1+\cdots+g_{i-1}+g_i+g_{i+1}+\cdots+g_n)-cg_i\ . \qquad (1.2.4)$$

这样，若$(g_1^*,\cdots,g_n^*)$为纳什均衡，则对每个村民 $i$，当其他村民选择$(g_1^*,\cdots,g_{i-1}^*,g_{i+1}^*,\cdots,g_n^*)$时，$g_i^*$ 必须使(1.2.4)最大化。这一最优化问题的一阶条件为

$$v(g_i+g_{-i}^*)+g_iv'(g_i+g_{-i}^*)-c=0\ . \qquad (1.2.5)$$

这里 $g_{-i}^*$代表$g_1^*+\cdots+g_{i-1}^*+g_{i+1}^*+\cdots+g_n^*$，将 $g_i^*$ 代入(1.2.5)，并把所有村民的一阶条件加总，然后再除以 $n$ 得

$$v(G^*)+\frac{1}{n}G^*v'(G^*)-c=0\ , \qquad (1.2.6)$$

其中，$G^*$表示 $g_1^*+\cdots+g_n^*$。但是，全社会的最优选择，用 $G^{**}$ 表示，应满足

$$\max_{0\leq G<\infty} G\cdot v(G)-G\cdot c\ .$$

它的一阶条件为

$$v(G^{**}+G^{**}v'(G^{**})-c=0\ . \qquad (1.2.7)$$

将(1.2.6)与(1.2.7)相比较可知,[①] $G^{*}>G^{**}$:和社会最优的条件相比,纳什均衡时放养羊的总数太多了。(1.2.5)所示的一阶条件表示一个已经放养 $g_i$ 只羊的村民再多养一只羊的收益(或更严格一点讲,是再多养"一点儿"羊的收益)。这多出的一只羊的价值为 $v(g_i+g_{-i}^{*})$,其成本为 $c$。对该村民已经养的羊的损害为每只羊 $v'(g_i+g_{-i}^{*})$,或总共为 $g_iv'(g_i+g_{-i}^{*})$。公共资源被过度使用了,因为每个村民只考虑他们自己的利益,并不管其行为对其他村民带来的后果,这就出现了(1.2.6)中的 $\frac{1}{n}G^{*}v'(G^{*})$,而非(1.2.7)中的 $G^{**}v'(G^{**})$。

# 1.3 理论发展:混合战略和均衡的存在性

## 1.3.A 混合战略

在1.1.C中我们把 $S_i$ 定义为参与者 $i$ 可以选择的战略集,并且对每一个参与者 $i$,$s_i^{*}$ 为其针对另外 $n-1$ 个参与者所选战略的最优反应,则战略组合 $(s_1^{*},\cdots,s_n^{*})$ 为博弈的纳什均衡,即

$$u_i(s_1^{*},\cdots,s_{i-1}^{*},s_i^{*},s_{i+1},\cdots,s_n^{*})\geq u_i(s_1^{*},\cdots,s_{i-1}^{*},s_i,s_{i+1}^{*},\cdots,s_n^{*}) \qquad \text{(NE)}$$

对 $S_i$ 中每一 $s_i$ 都成立。根据这一定义,下图所示"猜硬币"的博弈是不存在纳什均衡的。

| | | 参与人2 | |
|---|---|---|---|
| | | 正面 | 背面 |
| 参与人1 | 正面 | −1, 1 | 1, −1 |
| | 背面 | 1, −1 | −1, 1 |

猜硬币

① 如果我们设 $G^{*}\leq G^{**}$,那么由于 $v'<0$,$v(G^{*})\geq v(G^{**})$。类似地,由于 $v''<0$,有 $0>v'(G^{*})\geq v'(G^{**})$。最后,$G^{*}/n<G^{**}$,从而,(1.2.6)的左边将严格大于(1.2.7)式的左边,但这是不可能的,因为两式的右边都等于0。

在此博弈中,每一参与者的战略空间都是(正面,背面)。为理解矩阵表中所列参与者各自的收益,设想每一参与人拿有一枚硬币,并必须选择是出正面向上还是背面向上。若两枚硬币是一致的(即全部正面向上或全部背面向上),则参与人 2 赢走参与人 1 的硬币;如果两枚硬币不一致(一正一反),参与人 1 赢得参与人 2 的硬币。在此博弈中,没有一组战略能够满足(NE)的条件,因为如果参与者的战略是一致的——(正面,正面)或(背面,背面)——那么参与人 1 就希望能改变战略,如果参与者的战略不一致——(正面,背面)或(背面,正面)——则参与人 2 将希望能改变战略。

猜硬币博弈一个非常突出的特点是每个参与者都试图能先猜中对方的战略。这一类博弈在扑克、棒球、战争等其他环境中也经常会发生。在用扑克牌赌博的博弈中,类似的问题是如何决定使诈的次数:如果大家都知道参与者 $i$ 是从来不使诈的,那么任何时候当 $i$ 下很高的赌注时他的对手就会认输,但这又使得 $i$ 偶然使诈会有利可图;另一方面,使诈次数过多亦非上策。在棒球比赛中,假设投球手既可以掷出快球,又可掷出曲线球,那么击球手能够击中任何一类投球的前提是,他能正确估计到投球手将掷出哪一类球。与之相似,在战争中,假设进攻方可能在两个攻击点(或两条进攻路线,比如"陆路或水路")中选择其一,防御方可以抵御来自任一方向的攻击,但也只在它正确预测到进攻路线的前提下。

在博弈中,一旦每个参与者都竭力猜测其他参与者的战略选择,就不存在纳什均衡(至少不存在第 1.1.C 节所定义的纳什均衡),因为这时参与者的最优行为是不确定的,而博弈的结果必然要包含这种不确定性。现在引入混合战略的概念,我们可以将其解释为一个参与者对其他参与者行为的不确定性。(这一解释被豪尔绍尼(Harsanyi, 1973)深化,在第 3.2.A 节中我们将进一步讨论到)在下一节我们将把纳什均衡的定义扩展到包含混合战略,从而可以分析诸如猜硬币、扑克、棒球及战争等博弈的解出现的不确定性。

规范地表述,参与者 $i$ 的一个混合战略是在其战略空间 $S_i$ 中(一些或全部)战略的概率分布,此后我们称 $S_i$ 中的战略为 $i$ 的纯战略(pure strategies)。对本章所分析的完全信息同时行动博弈来说,一个参与者的纯战略就是他可以选择的不同行动,例如在猜硬币博弈中,$S_i$ 内含有两个纯战略,分别为正面和背面,这时参与者 $i$ 的一个混合战略为概率分布 $(q, 1-q)$,其中 $q$ 为出正面向上的概率,$1-q$ 为出背面向上的概率,且 $0 \leq q \leq 1$。混合战略 $(0,1)$ 表示参与者的一个纯战略,即只出背面向上,类似地,混合战略

(1,0)表示只出正面向上的纯战略。

作为混合战略的第二个例子,请回顾图 1.1.1 所示博弈,参与者 2 有三个纯战略:左、中、右,这时他的一个混合战略为概率分布$(q, r, 1-q-r)$,其中 $q$ 表示出左的概率,$r$ 表示出中的概率,$1-q-r$ 表示出右的概率,和前面相同,$0 \leq q \leq 1$,且这里还应满足 $0 \leq r \leq 1$ 及 $0 \leq q+r \leq 1$。在此博弈中,混合战略(1/3,1/3,1/3)表示参与者出左、中、右的概率相同,而(1/2,1/2,0)表示出左、中的概率相同,但绝不可能选择出右。和在所有情况下一样,参与者的一个纯战略只是混合战略的一种特例,例如参与者 2 只出左的纯战略可表示为混合战略(1,0,0)。

更为一般地,假设参与者 $i$ 有 $K$ 个纯战略:$S_i = \{s_{i1}, \cdots, s_{iK}\}$,则参与者 $i$ 的一个混合战略是一个概率分布$(p_{i1}, \cdots, p_{iK})$,其中 $p_{ik}$ 表示对所有 $k = 1, \cdots, K$,参与者 $i$ 选择战略 $s_{ik}$ 的概率,由于 $p_{ik}$ 是一个概率,对所有 $k = 1, \cdots, K$,有 $0 \leq p_{ik} \leq 1$ 且 $p_{i1} + \cdots + p_{iK} = 1$。我们用 $p_i$ 表示基于 $S_i$ 的任意一个混合战略,其中包含了选择每一个纯战略的概率,正如我们用 $s_i$ 表示 $S_i$ 内任意一个纯战略。

**定义**　对标准式博弈 $G = \{S_1, \cdots, S_n; u_1, \cdots, u_n\}$,假设 $S_i = \{s_{i1}, \cdots, s_{iK}\}$。那么,参与者 $i$ 的一个混合战略为概率分布 $p_i = (p_{i1}, \cdots, p_{iK})$,其中对所有 $k = 1, \cdots, K$,$0 \leq p_{ik} \leq 1$,且 $p_{i1} + \cdots + p_{iK} = 1$。

作为本节的一个小结,我们简单地回顾一下第 1.1.B 节中介绍的严格劣战略,并说明混合战略对那里的论证所起的潜在作用。当时讲到,如果战略 $s_i$ 为严格劣战略,那么参与者 $i$ 不可能作出这样的推断(针对其他参与者的战略选择),他的最优反应战略会是 $s_i$。如果我们引入混合战略,就可证明其逆命题:如果(针对其他参与者的战略选择)参与者 $i$ 都不可能作出这样的推断,即其战略 $s_i$ 会成为最优反应战略,则一定存在另一战略严格优于 $s_i$。[①] 图 1.3.1 和图 1.3.2 所示博弈说明了如果我们只讨论纯战略,这一逆命题是不成立的。

---

① 皮尔斯(Pearce, 1984)在两人博弈中证明了这一结论,并证明在参与者之间的混合战略允许相关的条件下,该结论在 $n$ 人博弈中同样成立,即必须允许参与者 $i$ 对参与者 $j$ 行动的推断与其对参与者 $k$ 行动的推断相关。奥曼(1987)提出这样的相关性在 $i$ 的推断中是非常自然的,即使在 $j$ 和 $k$ 完全独立地作出选择的情况下。例如,$i$ 可能会知道 $j$ 和 $k$ 都要去商学院,或也许去同一所商学院,但也许不会知道那里面教授什么课程。

| | | 参与人 2 L | 参与人 2 R |
|---|---|---|---|
| 参与人 1 | T | 3, - | 0, - |
| | M | 0, - | 3, - |
| | B | 1, - | 1, - |

图 1.3.1

图 1.3.1 显示出,一个给定的纯战略可能会严格劣于一个混合战略,即使这个纯战略并不严格劣于其他任何一个纯战略。在这一博弈中,针对参与人 1 对参与人 2 可能行动所作出的任何推断$(q, 1-q)$,1 的最优反应要么是 $T$(在 $q \geqslant 1/2$ 时),要么是 $M$(在 $q \leqslant 1/2$ 时),但不会是 $B$,虽然 $T$ 或 $M$ 都不严格优于 $B$。这里的关键在于 $B$ 是 $T$ 和 $M$ 的一个混合战略的严格劣战略:如果参与者 1 以 1/2 的概率出 $T$,以 1/2 的概率出 $M$,则其期望收益为 3/2,不管 2 将会选择什么(纯的或混合的)战略,3/2 都大于选择 $B$ 时将得到的收益 1。这个例子说明了在"寻找另外一个严格优于的战略"时,混合战略所起的作用。

| | | 参与人 2 L | 参与人 2 R |
|---|---|---|---|
| 参与人 1 | T | 3, - | 0, - |
| | M | 0, - | 3, - |
| | B | 2, - | 2, - |

图 1.3.2

图 1.3.2 说明了一个给定的纯战略可以是针对一个混合战略的最优反应,即使这一纯战略并不是对方任何一个纯战略的最优反应。在此博弈中,对参与人 2 的纯战略 $L$ 和 $R$ 来说,参与人 1 的最优反应都不是 $B$,但 $B$ 却是针对参与人 2 的混合战略 $(q, 1-q)$,当 $1/3 < q < 2/3$ 时参与人 1 的最优反应。这一例子说明了混合战略在"参与者 $i$ 可能持有的推断"中的作用。

### 1.3.B 纳什均衡的存在性

本节讨论和纳什均衡的存在性相关的几个问题。第一,我们把第 1.1.C节中纳什均衡的定义扩展到包含混合战略的情况;第二,我们应用这一扩展后的定义求解猜硬币博弈和性别战博弈的纳什均衡;第三,我们用图

示的方法证明任何一个参与者有两个纯战略的两人博弈都存在纳什均衡(可能包含了混合战略);最后,给出并讨论纳什定理(1950),它保证了在任何有限博弈(即有限个参与者,并且每个参与者可选择的纯战略有限的所有博弈)中,都存在纳什均衡(仍可能会包含混合战略)。

回顾第1.1.C节给出的纳什均衡定义,保证了每一参与者的纯战略都是其他参与者纯战略的最优反应战略。为把这一定义扩展到包含混合战略的情况,我们只需要求每一参与者的混合战略是其他参与者混合战略的最优反应。由于任何纯战略都可表示为混合战略——只要令该参与者所有其他纯战略出现的概率等于0——扩展后的定义完全包括了前一定义。

对参与者 $i$ 来讲,参与者 $j$ 的混合战略代表了他对 $j$ 将选择战略的不确定性,并据此计算参与者 $i$ 对 $j$ 混合战略的最优反应。我们先以猜硬币博弈为例,假定参与者1推断参与者2会以 $q$ 的概率出正面,以 $1-q$ 的概率出背面,亦即参与者1推断参与者2将使用混合战略 $(q,1-q)$。据此推断,参与者1出正面可得的期望收益为 $q(-1)+(1-q)\cdot 1=1-2q$,出背面的期望收益为 $q\cdot 1+(1-q)(-1)=2q-1$。由于当且仅当 $q<1/2$ 时,$1-2q>2q-1$,则 $q<1/2$ 时,参与者1的最优纯战略为出正面;$q>1/2$ 时为出背面;当 $q=1/2$ 时,参与者1出哪一面都是无差异的。余下的就是参与者1可能的混合战略反应。

令 $(r,1-r)$ 表示参与者1的混合战略,其出正面的概率为 $r$,对任意0到1之间的 $q$,现在我们计算 $r$ 的值,用 $r^*(q)$ 表示,从而使 $(r,1-r)$ 为参与者2选择 $(q,1-q)$ 时参与者1的最优反应,其结果可以表示为图1.3.3。当参与者2选择 $(q,1-q)$ 时,参与者1选择 $(r,1-r)$ 的期望收益为:

$$
\begin{aligned}
&rq\cdot(-1)+r(1-q)\cdot 1+(1-r)q\cdot 1+(1-r)(1-q)\cdot(-1)\\
&\quad=(2q+1)+r(2-4q)
\end{aligned}
\tag{1.3.1}
$$

其中,$rq$ 是(正面,正面)的概率,$r(1-q)$ 是(正面,背面)的概率,如此等等。[①]由于参与者1的期望收益在 $2-4q>0$ 时随 $r$ 递增;在 $2-4q<0$ 时随 $r$ 递减,则如果 $q<1/2$,参与者1的最优反应为 $r=1$(即出正面);如果 $q>1/2$,参与者1的最优反应为 $r=0$(即出背面),如图1.3.3所示 $r^*(q)$ 两段

---

① 如果概率($A$ 且 $B$)=概率($A$)×概率($B$),则事件 $A$ 和 $B$ 是独立的。那么,在用 $rq$ 表示1出正面同时2也出正面时,我们已隐含了假定1和2相互独立地进行选择,这与我们对同时行动博弈的限定是一致的。参见奥曼(1974)对相关均衡的定义,它应用于参与者的选择可以相关的博弈。(由于参与者在选择战略之前观察到一个随机结果,比如硬币在桌面上的转动。)

水平虚线。这一表述比上面非常相近的表述条件要强：那里我们只考虑纯战略，并发现如果 $q<1/2$，正面为最优纯战略，如果 $q>1/2$，背面为最优纯战略；这里我们考虑所有的纯战略和混合战略，同样发现如果 $q<1/2$，正面是所有战略（包含纯战略和混合战略）中的最优选择，如果 $q>1/2$，背面是所有战略中最优的。

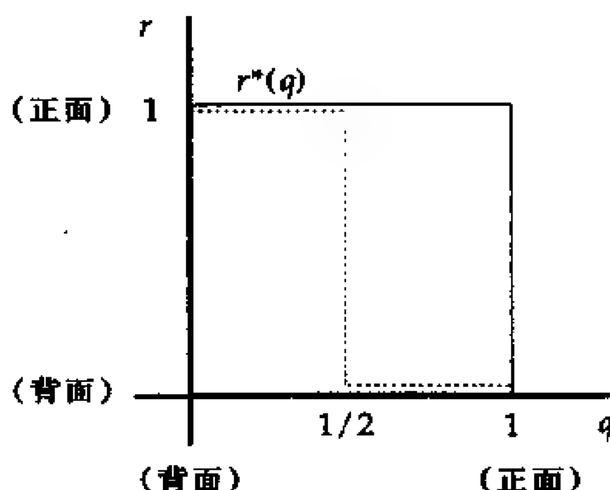



图 1.3.3

当 $q=1/2$ 时，参与者对 $(q,1-q)$ 最优反应的性质有所变化。前面已经提到，在 $q=1/2$ 时，参与者 1 选择纯战略正面或背面是无差异的。而且，因为参与者 1 在(1.3.1)中的期望收益在 $q=1/2$ 时与 $r$ 无关，所有混合战略 $(r,1-r)$ 对 1 都是无差异的。也就是说，当 $q=1/2$ 时，对于 0 到 1 之间的任何 $r$，混合战略 $(r,1-r)$ 都是 $(q,1-q)$ 的最优反应。那么，$r^*(1/2)$ 就是[0,1]间的整个区间，即图 1.3.3 所示 $r^*(q)$ 中间的竖线段。在第 1.2.A 节分析古诺模型时，我们称 $r_i(q_j)$ 为企业 $i$ 的最优反应函数。在这里，因为存在一个 $q$ 的值，使 $r^*(q)$ 有不止一个解，我们称 $r^*(q)$ 为参与者 1 的最优反应对应(best-response correspondence)。

为在更为一般的条件下推导出参与者 $i$ 对参与者 $j$ 混合战略的最优反应，进一步给出扩展的纳什均衡的正式定义，我们首先分析两个参与者的情况，从而可以通过最简单的方式说明主要思想。令 $J$ 表示 $S_1$ 中包含纯战略的个数，$K$ 表示 $S_2$ 包含纯战略的个数，则 $S_1=\{s_{11},\cdots,s_{1J}\}$，$S_2=\{s_{21},\cdots,s_{2K}\}$，我们用 $s_{1j}$ 和 $s_{2k}$ 分别表示 $S_1$、$S_2$ 中任意一个纯战略。

如果参与者 1 推断参与者 2 将以 $(p_{21},\cdots,p_{2k})$ 的概率选择战略 $(s_{21},\cdots,p_{2k})$，则参与者 1 选择纯战略 $s_{1j}$ 的期望收益为：

$$\sum_{k=1}^{K} p_{2k} u_1(s_{1j}, s_{2k}) \quad , \tag{1.3.2}$$

且参与者 1 选择混合战略 $P_1(p_{11}, \cdots, p_{1J})$ 的期望收益为：

$$\begin{aligned} v_1(P_1, P_2) &= \sum_{j=1}^{J} p_{1j} \Big[ \sum_{k=1}^{K} p_{2k} u_1(s_{1j}, s_{2k}) \Big] \\ &= \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} p_{1j} \cdot p_{2k} u_1(s_{1j}, s_{2k}) \ . \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

其中，$p_{1j} \times p_{2k}$ 表示参与者选择 $s_{1j}$ 且参与者 2 选择 $s_{2k}$ 的概率。根据(1.3.3)，参与者 1 选择混合战略 $P_1$ 的期望收益，等于按(1.3.2) 给出的每一个纯战略 $\{s_{11}, \cdots, s_{1J}\}$ 的期望收益的加权和，其权重分别为各自的概率 $(p_{11}, \cdots, p_{1J})$，那么，参与者 1 的混合战略 $(p_{11}, \cdots, p_{1J})$ 要成为他对参与者 2 战略 $P_2$ 的最优反应，其中任何大于 0 的 $p_{1j}$ 相对应的纯战略必须满足：

$$\sum_{k=1}^{K} p_{2k} u_1(s_{1j}, s_{2k}) \geq \sum_{k=1}^{K} p_{2k} u_1(s'_{1j}, s_{2k})$$

对 $S_1$ 中每一个 $s'_{1j}$ 都成立。这表明，一个混合战略要成为 $P_2$ 的最优反应，混合战略中每一个概率大于 0 的纯战略本身也必须是对 $P_2$ 的最优反应。反过来讲，如果参与者 1 有 $n$ 个纯战略都是 $P_2$ 的最优反应，则这些纯战略全部或部分的任意线性组合(同时其他纯战略的概率为 0) 形成的混合战略同样是参与者 1 对 $P_2$ 的最优反应。

为给出扩展的纳什均衡的正式定义，我们还需要计算当参与者 1 和 2 分别选择混合战略 $P_1$ 和 $P_2$ 时参与者 2 的期望收益。如果参与者 2 推断参与者 1 将分别以 $(p_{11}, \cdots, p_{1J})$ 的概率选择战略 $\{s_{11}, \cdots, s_{1J}\}$，则参与者 2 分别以概率 $(p_{21}, \cdots, p_{2k})$ 选择战略 $(s_{21}, \cdots, s_{2k})$ 时的期望收益为

$$\begin{aligned} v_2(P_1, P_2) &= \sum_{k=1}^{K} p_{2k} \Big[ \sum_{j=1}^{J} p_{1j} u_2(s_{1j}, s_{2k}) \Big] \\ &= \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} p_{1j} \cdot p_{2k} u_2(s_{1j}, s_{2k}) \ . \end{aligned}$$

在给出 $v_1(P_1, P_2)$ 和 $v_2(P_1, P_2)$ 后，我们可以重新表述纳什均衡的必要条件，即每一参与者的混合战略是另一参与者混合战略的最优反应：一对混合战略 $(P_1^*, P_2^*)$ 要成为纳什均衡，$P_1^*$ 必须满足

$$v_1(P_1^*, P_2^*) \geq v_1(P_1, P_2^*) \ . \tag{1.3.4}$$

对 $S_1$ 中战略所有可能的概率分布 $P_1$ 都成立，并且 $P_2^*$ 必须满足

$$v_2(P_1^*, P_2^*) \geq v_2(P_1^*, P_2) \ , \qquad (1.3.5)$$

对 $S_2$ 中战略所有可能的概率分布 $P_2$ 都成立。

**定义** 在两个参与者标准式博弈 $G=\{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ 中，混合战略 $(P_1^*, P_2^*)$ 是纳什均衡的充要条件为：每一参与者的混合战略是另一参与者混合战略的最优反应，即(1.3.4)和(1.3.5)必须同时成立。

下面我们用这一定义分析猜硬币博弈和性别战博弈，为此，我们运用图 1.3.3 中介绍的图示法，把参与者 $i$ 对参与者 $j$ 混合战略的最优反应在图上表示出来。为完成图 1.3.3 的内容，还需计算最优的 $q$ 值，用 $q^*(r)$ 表示，从而使 $(q, 1-q)$ 成为参与者 2 对参与者 1 战略 $(r, 1-r)$ 的最优反应。结果如图 1.3.4 所示，如果 $r<1/2$，则 2 的最优反应为背面，于是 $q^*(r)=0$；相似地，如果 $r>1/2$，则 2 的最优反应是正面，于是 $q^*(r)=1$。如果 $r=1/2$，则不仅参与者 2 出正面和出背面是无差别的，而且对其所有混合战略 $(q, 1-q)$ 也都完全相同，于是 $q^*(1/2)$ 为整个区间[0, 1]。

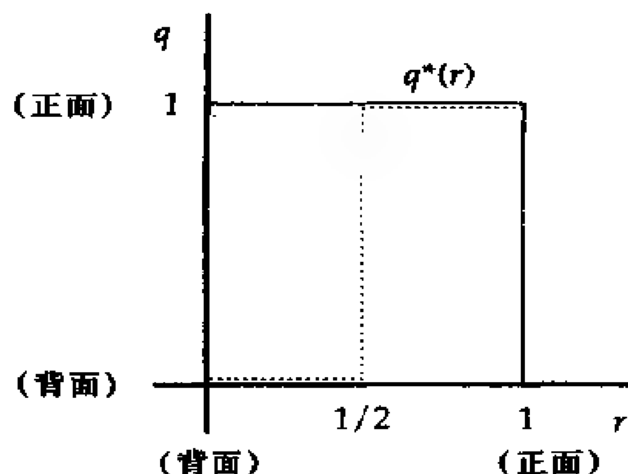



图 1.3.4

把图 1.3.4 的纵轴和横轴互换并旋转，我们得到图 1.3.5。单纯表示参与者 2 对参与者 1 混合战略的最优反应，图 1.3.5 不如图 1.3.4 更加直观，但它可与图 1.3.3 合并成图 1.3.6。图 1.3.6 和第 1.2.A 节分析古诺模型时的图 1.2.1 相类似，正如那里的最优反应函数 $r_2$ $(q_1)$ 和 $r_1$ $(q_2)$ 的交点确定了古诺博弈的纳什均衡，在这里最优反应对应 $r^*$ $(q)$ 和 $q^*$ $(r)$ 的交点给出了猜硬币博弈的混合战略纳什均衡：如果参与者 $i$ 的战略是 (1/2, 1/2)，则参与者 $j$ 的最优反应为 (1/2, 1/2)，它满足纳什均

衡的要求。

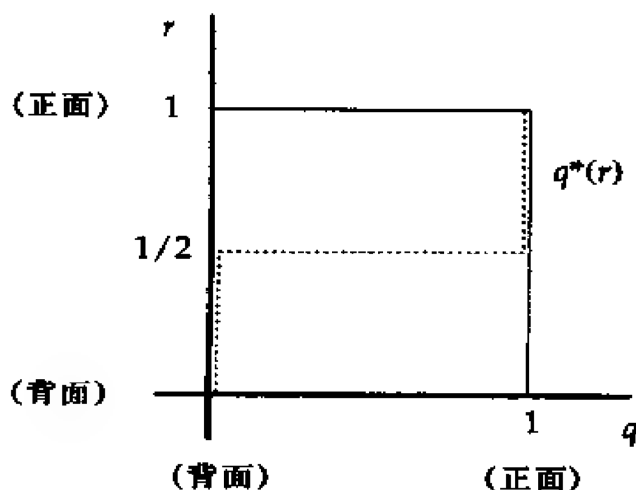



图 1.3.5

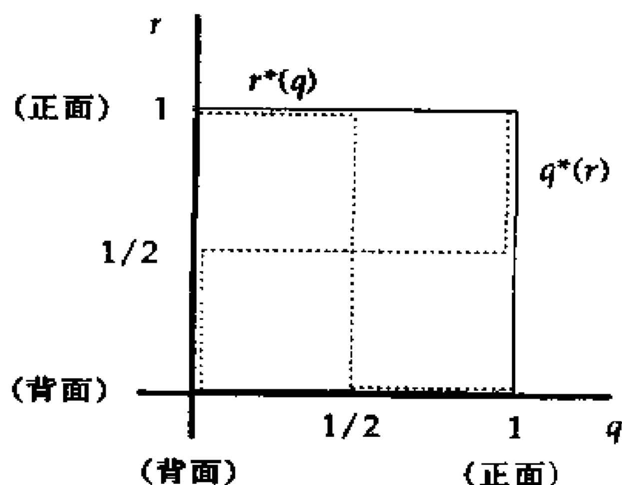



图 1.3.6

应该强调的是，这样一个混合战略纳什均衡并不是建立在任何参与者扔硬币、掷骰子或其他随机选择行为的基础之上，我们可以把参与者 $j$ 的混合战略解释为参与者 $i$ 对参与者 $j$ 将会选择哪一个(纯)战略的不确定性。例如在棒球比赛中，投球手也许是基于以往投球的成功率决定是投快速直线球还是投曲线球。如果击球手了解投球手是如何选择的，但并不能观察到他以往的成功率，那么击球手就可能会推断投球手投出快球和投出直线球的可能性是相等的。这时我们把击球手的推断表示为投球手采取混合战略(1/2,1/2)，而事实上投球手是基于击球手所不了解的信息选择一个纯战略。更为一般地讲，我们可以理解为参与者 $j$ 被赋予了一小点儿内部信息，

基于他所掌握的内部信息,参与者 $j$ 更倾向于选择某一相关的纯战略。不过,由于参与者 $i$ 并不能观测到 $j$ 的私人信息,$i$ 并不能确定 $j$ 的选择,我们用 $j$ 的混合战略表示 $i$ 的这种不确定性。在第 3.2.A 节,我们还将为这种对混合战略的解释提供更为正式的表述。

作为混合战略纳什均衡的第二个例子,考虑第 1.1.C 节中的性别战博弈,令 $(q, 1-q)$ 为帕特的一个混合战略,其中他选择歌剧的概率为 $q$,且令 $(r, 1-r)$ 为克里斯的一个混合战略,其中他选择歌剧的概率为 $r$。如果帕特的战略为 $(q, 1-q)$,则克里斯选择歌剧的期望收益为 $q\times2+(1-q)\times0=2q$,选择拳击的期望收益为 $q\times0+(1-q)\times1=1-q$。从而,在 $q>1/3$ 时,克里斯的最优反应为歌剧(即 $r=1$);$q<1/3$ 时,克里斯的最优反应为拳击(即 $r=0$);$q=1/3$ 时,任何可行的 $r$ 都是最优反应。类似地,如果克里斯的战略为 $(r, 1-r)$,则帕特选择歌剧的期望收益为 $r\times1+(1-r)\times0=r$,选择拳击的期望收益为 $r\times0+(1-r)\times2=2(1-r)$。从而,$r>2/3$ 时,帕特的最优反应是歌剧(即 $q=1$);$r<2/3$ 时,帕特的最优反应是拳击(即 $q=0$),$r=2/3$ 时,任何可行的 $q$ 值都是最优反应。如图 1.3.7 所示,最优反应对应的交点之一,即帕特的混合战略 $(q, 1-q)=(1/3, 2/3)$ 与克里斯的混合战略 $(r, 1-r)=(2/3, 1/3)$ 就是原博弈的一个纳什均衡。

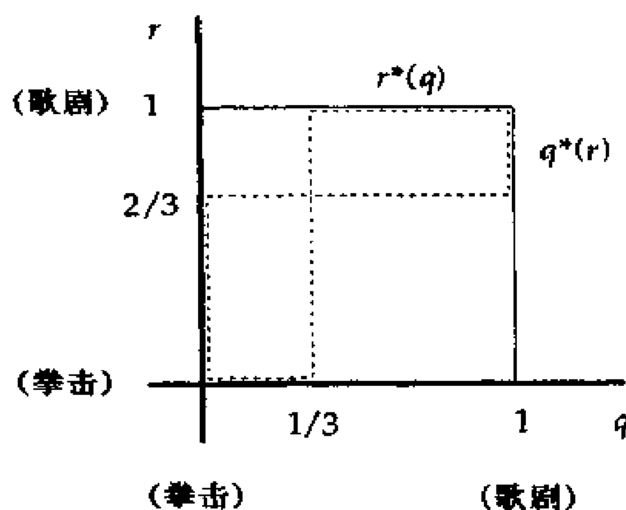



图 1.3.7

本例和图 1.3.6 的不同之处在于,后者两位参与者的最优反应对应只有一个交点,图 1.3.7 中 $r^*(q)$ 和 $q^*(r)$ 有三个交点:$(q=0, r=0)$、$(q=1, r=1)$ 及 $(q=1/3, r=2/3)$。另外两个交点分别代表了第 1.1.C 节讲过的两个纯战略纳什均衡(拳击、拳击)和(歌剧,歌剧)。

在任何博弈中，一个纳什均衡(包括纯战略和混合战略均衡)都表现为参与者间最优反应对应的一个交点，即使该博弈的参与者在两人以上，或有些或全部参与者有两个以上的纯战略。不过遗憾的是，惟一一种可以用图形简明表示出参与者之间最优反应对应的博弈，就是上面介绍的每个参与者只有两个纯战略的两人博弈。下面我们用图示法论证任何这种两人博弈都存在纳什均衡(可能包含了混合战略)。

| | | 参与人2 | |
|---|---|---|---|
| | | 左 | 右 |
| 参与人1 | 上 | $x$, - | $y$, - |
| | 下 | $z$, - | $w$, - |

图1.3.8

考虑图1.3.8给出的参与者1的收益情况。$x$ 和 $z$，$y$ 和 $w$ 各自的相对大小对博弈的结果十分重要，由此可以分为以下四种主要情况：(i) $x>z$ 且 $y>w$，(ii) $x<z$ 且 $y<w$，(iii) $x>z$ 且 $y<w$，(iv) $x<z$ 且 $y>w$。我们首先讨论这四种主要情况，然后再分析涉及 $x=z$ 或 $y=w$ 时的情况。

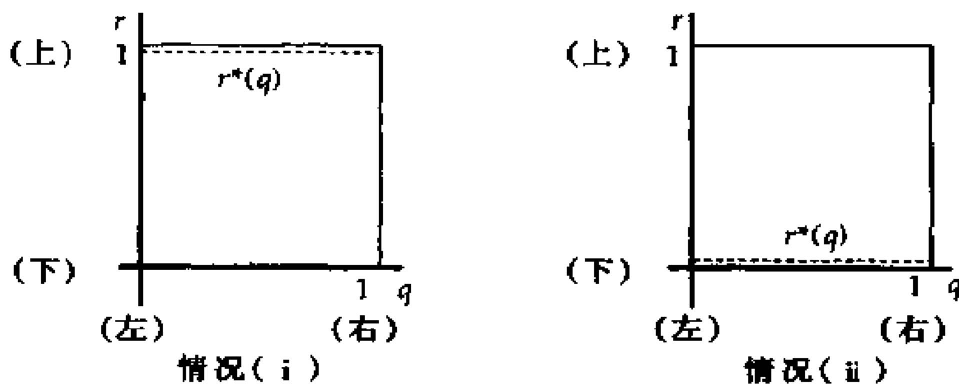



图1.3.9

对参与者1，在情况(i)中，上严格优于下；在情况(ii)中，下严格优于上。根据前面讲过的严格劣战略定义：当且仅当参与者 $i$(对其他参与者所选择的战略)不能作出这样的推断，使选择战略 $s_i$ 成为最优反应，则 $s_i$ 为严格劣战略。因此，如果$(q,1-q)$是参与者2的一个混合战略，其中 $q$ 为2选择左的概率，那么在情况(i)中，没有 $q$ 能使参与者1选择下成为最优，并且在情况(ii)中，没有 $q$ 能使1选择上成为最优。令$(r,1-r)$表示参与者1的一个混合战略，其中 $r$ 是1选择上的概率，我们可以在图1.3.9中分别表

示出情况(i)和情况(ii)下的最优反应对应。(在这两种情况下，最优反应对应事实上也是最优反应函数，因为没有 $q$ 值使得参与者 1 有多个最优反应。)

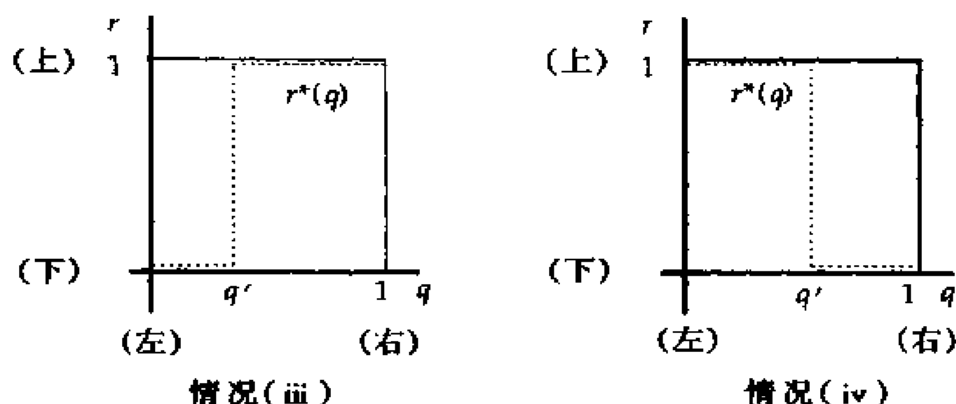



图 1.3.10

在情况(iii)和情况(iv)中，上和下都不是严格劣战略，那么，必定对某些 $q$ 值，选择上是最优的，对另一些 $q$ 值，选择下是最优的。令 $q' = (w-y)/(x-z+w-y)$，那么在情况(iii)中，$q > q'$ 时上是最优的，$q < q'$ 时下最优；而在(iv)中则相反。在两种情况下，$q = q'$ 时，任何可行的 $r$ 都是最优的。这两种情况的最优反应对应由图 1.3.10 给出。

由于 $x = z$ 时，$q' = 1$，而 $y = w$ 时，$q' = 0$，所有包含 $x = z$ 或 $y = w$ 的情况下，最优反应对应将呈"$L$"状(即单位正方形中相邻的两条边)我们可设想图 1.3.10 中(iii)或(iv)，在 $q' = 0$ 及 $q' = 1$ 时的情况。

在图 1.3.8 中分别加入任意的参与者 2 的收益值，经过与上面类似的计算可得同样的四个最优反应对应，只不过与图 1.3.4 相同，水平轴代表 $r$ 值，而纵轴代表 $q$ 值。做从 1.3.4 到 1.3.5 同样的处理，旋转这四个图形的坐标系，可以得到图 1.3.11 和图 1.3.12(在图 1.3.12 中，对 $r'$ 的定义与图 1.3.10 中 $q'$ 类似)。

决定性的一点在于，给定参与者 1 的四种最优反应对应的任何一种，即图 1.3.9 或图 1.3.10 中的任何一条 $r^*(q)$，及参与者 2 的任何四种之一，即图 1.3.11 或图 1.3.12 中的任何一条 $q^*(r)$，这一组最优反应对应至少有一个交点，于是博弈至少有一个纳什均衡，对 16 种可能的最优反应对应组合情况进行逐一检验，我们留在习题中进行。这里只定性地给出可以得到的结论。可能出现的情况有：(1)惟一的纯战略纳什均衡，(2)惟一的混合战略纳什均衡，(3)两个纯战略纳什均衡和一个混合战略纳什均衡。前面讲

过的图 1.3.6 的猜硬币博弈是第二种情况的一个例子，图 1.3.7 的性别战博弈是第三种情况的一个例子。囚徒困境则属于第一种情况，它是由 $r^*(q)$的(i)或(ii)和 $q^*(r)$的(i)或(ii)结合产生的。[①]

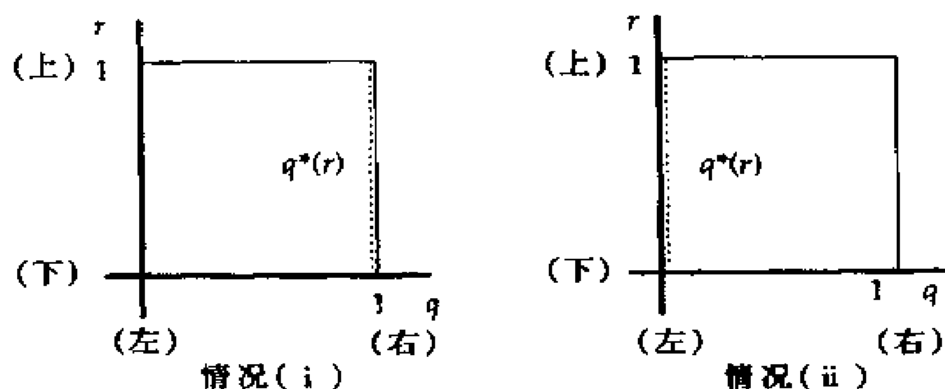



图 1.3.11

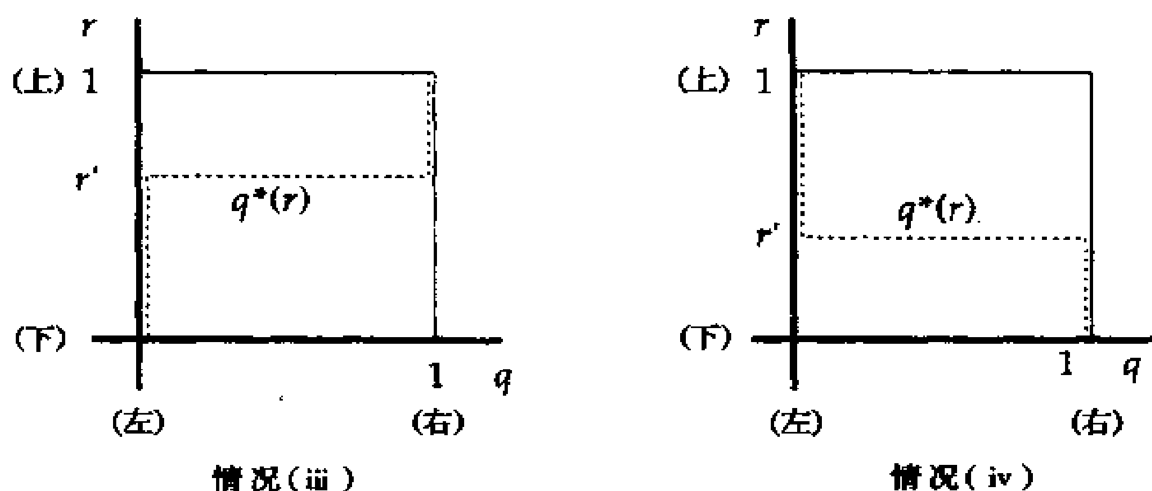



图 1.3.12

本节的最后，我们讨论在更为一般的博弈中纳什均衡的存在性。如果上面关于两人两个纯战略博弈的论证不使用图示的方法，而用数学方法，则可以适用于一般的任意有限战略空间的 $n$ 人博弈。

**定理** (纳什，1950)：在 $n$ 个参与者的标准式博弈 $G=\{S_1,\cdots,S_n;u_1,$

① 包含 $x=z$ 或 $y=w$ 时的情况并不违背一组最优反应对应至少有一个交点的结论。相反，除书中讲到的那 3 种情况外，还可能存在两个纯战略纳什均衡无混合战略纳什均衡以及连续的纳什均衡的情况。

$\cdots, u_n\}$中,如果 $n$ 是有限的,且对每个 $i$, $S_i$ 是有限的,则博弈存在至少一个纳什均衡,均衡可能包含混合战略。

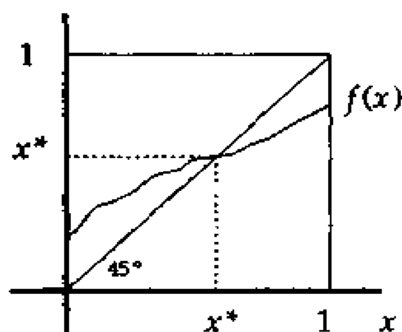



图 1.3.13

纳什定理的证明要用到不动点定理。作为不动点定理的一个简单例子,假定 $f(x)$是一个定义域和值域都在[0,1]之间的连续函数,则布劳尔(Brouwer)的不动点定理保证了存在至少一个固定的点——即在[0,1]中存在至少一个值 $x^*$,使 $f(x^*)=x^*$。图 1.3.13 给出了一个例子。

运用不动点定理证明纳什定理包含两个步骤:(1)证明一个特定对应上的任何不动点都是纳什均衡;(2)使用一个恰当的不动点定理证明这一对应一定有一个不动点。这里所说的对应指 $n$ 人最优反应对应,所指的"恰当的不动点定理"应归功于角谷(Kakutani, 1941),他将布劳尔的定理从函数推广到(符合一定条件的)对应。

$n$ 人最优反应对应由 $n$ 个单个参与人的最优反应对应通过下述计算得出:考虑任意的一个混合战略组合($p_1, \cdots, p_n$),对每一个参与者 $i$,求出 $i$ 针对其他参与者混合战略($p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{i+1}, \cdots, p_n$)的最优反应。然后构建每一参与者一个上述最优反应的所有可能组合的集合(正式地说,即导出每一参与者的最优反应对应,然后构建这 $n$ 个参与者最优反应对应的交叉积(笛卡尔积))。一个混合战略组合($p_1^*, \cdots, p_n^*$)是这一对应集中的不动点,如果($p_1^*, \cdots, p_n^*$)属于参与者对($p_1^*, \cdots, p_n^*$)的最优反应的所有可能组合的集合。即,对每个 $i$, $p_i^*$ 必须是参与者 $i$ 对($p_1^*, \cdots, p_{i-1}^*, p_{i+1}^*, \cdots, p_n^*$)的最优反应(之一),这又恰好符合纳什均衡的条件,即($p_1^*, \cdots, p_n^*$)是一个纳什均衡。这就完成了第(1)步。

第(2)步的证明要用到每一参与者的最优反应对应都在某种条件下连续这一事实。在布劳尔的不动点定理中连续性的作用可在图 1.3.13 构建的 $f(x)$看出:如果 $f(x)$是不连续的,不动点就不一定存在。例如在图

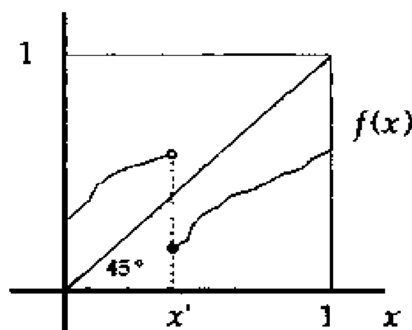



图 1.3.14

1.3.14 中，对所有 $x < x'$，$f(x) > x$，但对 $x \leq x'$，$f(x) < x'$。[①]为理解图 1.3.14 中的 $f(x)$ 和参与者的最优反应对应的不同之处，考虑图 1.3.10 中的情况(Ⅲ)：当 $q = q'$ 时，$r^*(q)$ 包括了 0、1 以及中间整个区间(稍微正式一点表述，即 $r^*(q')$ 包括了当 $q$ 从左侧靠近 $q'$ 时，$r^*(q)$ 的极限，以及 $q$ 从右侧靠近 $q'$ 时，$r^*(q)$ 的极限，并且包括这两个极限之间的所有 $r$ 值)。如果图 1.3.14 中 $f(x')$ 要成为类似的参与者 1 的最优反应对应 $r^*(q')$，则 $f(x')$ 的值不仅应包含实心点(如图所示)，还应包含空心点及整个虚线区间，这时 $f(x)$ 就会在 $x'$ 有一个不动点。

每个参与者的最优反应对应总是如图 1.3.10 所示的 $r^*(q')$：它总是包括(借用的一般意义上的)从左侧的极限、从右侧的极限以及其间的所有值。其原因在前面讨论两个参与者的情况时已经证明：如果参与者 $i$ 有 $n$ 个纯战略都是其他参与者混合战略的最优反应，则参与者 $i$ 的这些最优纯战略的任意概率的线性组合(并令其他纯战略的概率为 0)得到的混合战略 $P_i$ 亦是参与者 $i$ 的最优反应。由于每一参与者的最优反应对应总是具有这一特性，$n$ 人最优反应对应亦具有这一特性；这就满足了角谷的假定，于是 $n$ 人最优反应对应有一个不动点。

纳什定理保证了相当广泛种类博弈中均衡的存在性，但第 1.2 节应用举例所分析的博弈却不在此列(因为每一参与者的战略空间都是无限的)。这说明纳什定理中的假定是均衡存在性的充分条件，却不是必要条件——还有许多博弈，虽不满足定理假定的条件，却同样存在一个或多个纳什均衡。

---

① $f(x')$ 的值由实点决定，空心点表示 $f(x')$ 不包含这一值。中间的虚线只表示 $x = x'$ 时，可能取到两个点的值，但不代表也会取到中间任何一点的值。

## 1.4 进一步阅读

关于重复剔除严格劣战略和纳什均衡的假定,及借用参与者的推断来解释混合战略,参见布兰登贝格尔(1992)。关于(古诺型)企业选择产量模型和(贝特兰德型)企业选择价格模型之间的关系,参见克雷普斯和谢克曼(Scheikman,1983),他们证明在某些条件下,企业面临生产能力的约束时(企业在选择价格之前,要付出一定成本选择生产能力),贝特兰德型模型会出现古诺模型的结果。关于仲裁,参见吉本斯(Gibbons,1988),他说明了在最后要价仲裁及协议仲裁中,仲裁者所偏好的方案如何依赖于各方的要价中所包含的信息。最后,关于纳什均衡的存在性,包括纯战略在战略空间中连续的博弈,请参考达斯古普塔和马斯金(Dasgupta & Maskin,1986)。

## 1.5 习题与练习

**第1.1节**

1.1 什么是博弈的标准式?在博弈的标准式中,什么是严格劣战略?什么是一个纯战略纳什均衡?

1.2 在以下博弈的标准式中,哪些战略不会被重复剔除严格劣战略所剔除?纯战略纳什均衡又是什么?

| | *L* | *C* | *R* |
|---|---|---|---|
| *T* | 2,0 | 1,1 | 4,2 |
| *M* | 3,4 | 1,2 | 2,3 |
| *B* | 1,3 | 0,2 | 3,0 |

1.3 两个人就如何分配一元钱进行谈判,双方同时提出各自希望得到的份额,分别为 $s_1$ 和 $s_2$,且 $0 \leq s_1, s_2 \leq 1$。若 $s_1 + s_2 \leq 1$,则二人分别得到他们所要的一份;如果 $s_1 + s_2 > 1$,则两个人均一无所获。求出此博弈的纯战略纳什均衡。

**第 1.2 节**

1.4 假定古诺的寡头垄断模型中有 $n$ 个企业，令 $q_i$ 代表企业 $i$ 的产量，且 $Q = q_1 + \cdots + q_n$ 表示市场总产量，$p$ 表示市场出清价格，并假设反需求函数由 $p(Q) = a - Q$ 给出(设 $Q < a$，其他情况下 $p = 0$)。并设企业 $i$ 生产出 $q_i$ 的总成本 $C_i(q_i) = cq_i$，即没有固定成本，且边际成本为常数 $c$，这里我们设 $c < a$。根据古诺的假定，企业同时就产量进行决策。求出博弈的纳什均衡。当 $n$ 趋于无穷时，将会发生什么情况？

1.5 考虑以下两个古诺双头垄断模型的战略空间有限的情况。第一，假定每个企业必须选择要么生产垄断产出的一半 $q_m/2 = (a - c)/4$，要么生产古诺均衡产量 $q_c = (a - c)/3$，任何其他产量都是不允许的。证明这一非此即彼的博弈是一个囚徒困境式的问题：每一个企业都有一个严格劣战略，并且在均衡状态下，每一企业的福利都要比他们相互合作时下降。第二，假设每个企业可以选择 $q_m/2$ 或 $q_c$，或第三种产量 $q'$，求出一个 $q'$ 的值，使得这一博弈在以下方面等价于第 1.2.A 节中的古诺模型，即$(q_c, q_c)$是惟一的纳什均衡，并且在均衡状态下，每一企业的福利都比他们相互合作时要低，但两个企业都没有严格劣战略。

1.6 考虑在古诺双头垄断模型中，反需求函数为 $p(Q) = a - Q$，但两企业有不同的边际成本，企业 1 为 $c_1$，企业 2 为 $c_2$，求出当每个企业 $0 < c_i < a/2$ 时的纳什均衡。如果 $c_1 < c_2 < a$ 但 $2c_2 > a + c_1$，纳什均衡又有什么变化？

1.7 在第 1.2.B 中，我们分析了产品有差异的贝特兰德双头垄断模型。同质产品的情况下结论是十分明显的。假设 $p_i < p_j$ 时，消费者对企业 $i$ 产品的需求为 $a - p_i$，$p_i > p_j$ 时为 0，$p_i = p_j$ 时为$(a - p_i)/2$。同时假设不存在固定成本，且边际成本为常数 $c$，这里 $c < a$。证明如果企业同时选择价格，则惟一的纳什均衡就是每个企业的定价均为 $c$。

1.8 设有一批选民在一个单位区间从左($x = 0$)至右($x = 1$)均匀分布，为一个职位参加竞选的每个候选人同时选择其竞选基地(即在 $x = 0$ 到 $x = 1$ 中间的一个点)。选民观察候选人的选择，然后每一投票人把票投给其基地离自己最近的候选人。比如，如果有两个候选人，他们分别在 $x_1 = 0.3$ 和 $x_2 = 0.6$ 选择基地，则处于 $x = 0.45$ 左边的所有选民都会把票投给候选人 1，右边的人都会把票投给候选人 2，这样候选人 2 就可以得到 55%的选票赢得这场选举。假设候选人只关心他能否当选——他们根本上一点都不关心其基地！如果有两个候选人，博弈的纯战略纳什均衡是什

么？如果有三个候选人，求出一个纳什均衡。（假设选择同一个基地的候选人将平分这一基地可得的选票，得票最高的候选人不止一人时，谁当选由掷硬币来决定。）参见霍特林（Hotelling，1929）关于此类博弈的早期模型。

**第1.3节**

1.9 什么是标准式博弈的混合战略？什么是标准式博弈的混合战略纳什均衡？

1.10 证明在1.1节中所分析的3个标准式博弈——囚徒困境、图1.1.1和图1.1.4中，不存在混合战略纳什均衡。

1.11 解出习题1.2所给博弈的混合战略纳什均衡。

1.12 求出下面标准式博弈的混合战略纳什均衡。

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | 2,1 | 0,2 |
| $B$ | 1,2 | 3,0 |

1.13 两个企业各有一个工作空缺，假设企业所给的工资不同（其原因不在此处讨论，但关系到每一个空缺的价值）：企业 $i$ 给的工资为 $w_i$，这里 $(1/2)w_1 < w_2 < 2w_1$。设想有两个工人，每人只能申请一份工作，两人同时决定是申请企业1的工作，还是向企业2申请。如果只有一个工人向一个企业申请，他就会得到这份工作；如果两个工人同时向一个企业申请工作，则企业随机选择一个工人，另一人就会失业（这时收益为0）。解出两工人标准式博弈的纳什均衡。（要更进一步了解企业是如何决定工资的，请参阅蒙哥马利（Montgomery），1991）

| | | 工人2 | |
|---|---|---|---|
| | | 向企业1申请 | 向企业2申请 |
| 工人1 | 向企业1申请 | $1/2w_1, 1/2w_1$ | $w_1, w_2$ |
| | 向企业2申请 | $w_2, w_1$ | $1/2w_2, 1/2w_2$ |

1.14 证明附录1.1.C中的命题 $B$ 不仅对纯战略成立，对混合战略同样成立：在混合战略纳什均衡中，概率大于0的战略一定不会被重复剔除严格劣战略所剔除。

## 1.6 参考文献

Aumann, R. 1974. "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies". *Journal of Mathematical Economics* 1:67—96.

——. 1976. "Agreeing to Disagree." *Annals of Statistics* 4:1236—39.

——. 1987. "Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality." *Econometrica* 55:1—18.

Bertrand, J. 1883. "Theorie Mathematique de la Richesse Sociale." *Journal des Savants* 499—508.

Brandenburger, A. 1992. "Knowledge and Equilibrium in Games." Forthcoming in *Journal of Economic Perspectives*.

Cournot, A. 1838. *Recherches sur les Principes Mathematiques de la theorie des Richesses*. English edition: *Researches into the Methematical Principles of the Thoery of Wealth*. Edited by N. Bacon. New York: Macmillan, 1897.

Dasgupta, P., and E. Maskin. 1986. "The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games, I: Theory." *Review of Economic Studies* 53:1—26.

Farber, H. 1980. "An Analysis of Final-Offer Arbitration." *Journal of Conflict Resolution* 35:683—705.

Friedman, J. 1971. "A Noncooperative Equilirium for Supergames." *Review of Economic Studies* 28:1—12.

Gibbons, R. 1988. "Learning in Equilibrium Models of Arbitration." *American Economic Review* 78:896—912.

Hardin, G. 1968 "The tragedy of the Commons." *Science* 162:1243—48.

Harsanyi, J. 1973. "Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed Strategy Equilibrium Points." International Journal of Game Theory 2:1—23.

Hotelling, H. 1929. "Stability in Competition." *Economic Journal* 39:41—57.

Hume, D. 1739. *A Treatise of Human Nature*. Reprint. London: J. M. Dent. 1952.

Kakutani, S. 1941. "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem." *Duke Mathematical Journal* 8:457—59.

Kreps, D., and J. Scheinkman. 1983. "Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes." *Bell Journal of Economics* 14:326—37.

Montgomery, J. 1991. "Equilirium Wage Dispersion and Interindustry Wage Differentials." *Quarterly Journal of Economics* 106:163—79.

Nash, J. 1950. "Equilibrium Points in n-Person Games." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36:48—49.

Pearce, D. 1984. "Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection." *Econometrica* 52:1029—50.

Stackelberg, H. von. 1934. *Marktform und Gleichgewicht*. Vienna: Julius Springer.

# 第2章

# 完全信息动态博弈

本章介绍动态博弈。我们仍集中分析完全信息的博弈(即参与者的收益函数是共同知识的博弈);有关非完全信息的博弈将在第3章介绍。其中第2.1节分析完全且完美信息的动态博弈,这是指在博弈进行的每一步当中,要选择行动的参与者都知道这一步之前博弈进行的整个过程。从第2.2节到第2.4节,我们讨论完全但不完美信息博弈:在博弈的某些阶段,要选择行动的参与人并不知道在这一步之前博弈进行的整个过程。

所有动态博弈的中心问题是可信任性。作为不可置信的威胁的一个例子,考虑下面两步博弈。第一,参与者1选择支付1000美元钱给参与者2还是一分不给;第二,参与者2观察参与者1的选择,然后决定是否引爆一颗手雷把两人一块儿炸死。假设参与者2威胁参与者1,如果他不付1000美元就引爆手雷,如果参与者1相信这一威胁,他的最优反应是支付1000美元,但参与者1却不会对这一威胁信以为真,因为它不可置信:如果给参与者2一个机会,让他把威胁付诸实施,参与者2也不会选择去实施它,这样参与者1就会一分不付。[①]

第2.1节分析如下类型完全且完美信息的动态博弈:首先参与者1行动,参与者2先观察到参与者1的行动,然后参与者2行动,博弈结束。手雷博弈即属这一类型,斯塔克尔贝里(1934)的双头垄断模型,里昂惕夫(Leontief, 1946)的有工会企业中的工资和就业决定模型亦属这一类博弈。我们定义此类博弈的逆向归纳解(backwards-induction outcome)并简要讨论它与纳什均衡的关系(这一关系的详细讨论在第2.4节)。作为例子,我们解出在斯塔克尔贝里和里昂惕夫模型中的逆向归纳解,并对鲁宾斯坦(Ru-

① 参与者1可能会考虑威胁要引爆手雷的对手不是个疯子。这种怀疑在模型中我们表示为不完全信息——参与者1对参与者2的收益函数并不确定。参见第3章。

binstein, 1982)的讨价还价模型推导出相似的结果，尽管后面的博弈有潜在无穷多步的行动，因此并不属于以上类型的博弈。

第2.2节丰富了前一节分析的博弈类型：首先参与者1和2同时行动，接着参与者3和4观察到1和2选择的行动，然后参与者3和4同时行动，博弈结束。这里的同时行动意味着此类博弈有不完美信息(这一点在第2.4节将进一步给出解释)。我们定义这种博弈的子博弈精炼解(subgame-perfect outcome)，它是逆向归纳方法在此类博弈中的自然延伸。在应用举例中，将解出戴蒙德和迪布维格(Diamond & Dybvig，1983)的银行挤提模型、拉齐尔和罗森(Lazear & Rosen, 1981)的锦标赛模型的结果。

第2.3节研究重复博弈（repeated game），它指一组固定的参与者多次重复进行同一给定的博弈，并且在下次博弈开始前，参与者都可以观察到前面所有博弈的结果。这里分析的中心问题是（可信的）威胁和对以后行为所做的承诺可以影响到当前的行为。我们给出重复博弈中子博弈精炼纳什均衡的定义，并将其与第2.1节中的逆向归纳解和第2.2节中子博弈精炼解联系起来，还将给出无限次重复博弈中的无名氏定理（Folk Theorem）及其证明。在应用举例中，将分析弗里德曼（1971）的古诺双头垄断企业相互串谋模型，夏皮罗和施蒂格利茨（Shapiro & Stiglitz，1984）的货币政策模型。

第2.4节我们介绍分析一般的完全信息动态博弈所需要的工具，不再区分信息是否是完美的。我们定义博弈的扩展式表述并将其与第一章介绍的标准式表述相互联系起来，同时定义一般博弈中的子博弈精炼纳什均衡。本节和本章的重点都在于，一个完全信息动态博弈可能会有多个纳什均衡，但其中一些均衡也许包含了不可置信的威胁或承诺，子博弈精炼纳什均衡则是通过了可信性检验的均衡。

## 2.1 完全且完美信息动态博弈

### 2.1.A 理论：逆向归纳法

手雷博弈属于下面简单类型的完全且完美信息动态博弈：

1. 参与者1从可行集$A_1$中选择一个行动$a_1$，
2. 参与者2观察到$a_1$，之后从可行集$A_2$中选择一个行动$a_2$，
3. 两人的收益分别为$u_1(a_1, a_2)$和$u_2(a_1, a_2)$。

许多经济问题都符合这种博弈,[①] 其中的两个例子(后面将进行详细讨论)是斯塔克尔贝里的双头垄断模型和里昂惕夫的有工会企业工资和就业模型。其他的经济问题可通过允许更长的行动序列建立模型:或者加入更多的参与者,或者允许参与者有多步行动(在第2.1.1节讨论的鲁宾斯坦的讨价还价模型就是后者的一个例子)。完全且完美信息动态博弈的主要特点是:(i)行动是顺序发生的,(ii)下一步行动选择之前,所有以前的行动都可被观察到,及(iii)每一可能的行动组合下参与者的收益都是共同知识。

我们可以通过逆向归纳法求解此类博弈问题,方法如下。当在博弈的第二阶段参与者2行动时,由于其前参与者1已选择行动 $a_1$,他面临的决策问题可用下式表示:

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2) .$$

假定对 $A_1$ 中的每一个 $a_1$,参与者2的最优化问题只有惟一解,用 $R_2(a_1)$表示,这就是参与者2对参与者1的行动的反应(或最优反应)。由于参与者1能够和参与者2一样解出2的问题,参与者1可以预测到参与者2对1每一个可能的行动 $a_1$ 所作出的反应,这样1在第一阶段要解决的问题可归结为:

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, R_2(a_1)) .$$

假定参与者1的这一最优化问题同样有惟一解,表示为 $a_1^*$,我们称 $(a_1^*, R_2(a_1^*))$是这一博弈的逆向归纳解。逆向归纳解不含有不可置信的威胁:参与者1预测参与者2将对1可能选择的任何行动 $a_1$ 做出最优反应,选择行动 $R_2(a_1)$;这一预测排除了参与者2不可置信的威胁,即参与者2将在第二阶段到来时做出不符合自身利益的反应。

在第一章中我们用标准式表述研究完全信息静态博弈,并作为这种博弈的解的概念,重点讨论了纳什均衡。不过在本节对动态博弈的讨论中,我们既不涉及标准式表述,亦不提及纳什均衡;分别代之以(1)—(3)中对博弈的文字描述和已定义的逆向归纳解。在第2.4.A节中,为了使概念更精确,我们将定义子博弈精炼纳什均衡为:只有不包含不可置信的威胁的纳什均衡才是子博弈精炼纳什均衡,我们会发现一个属于(1)—(3)所界定的博

---

① 参与者2的可选择行动空间 $A_2$,可以允许依赖于参与者1的行动 $a_1$。这种依赖性可以表示为 $A_2(a_1)$,或者可以合并到参与者2的收益函数中,对那些给定 $a_1$ 时不可行的 $a_2$,令 $u_1(a_1, a_2) = -\infty$。有时参与者1的某些行动甚至可以结束整个博弈,不给参与者2行动的机会,对这样的 $a_1$ 值,可行的行动空间 $A_2(a_1)$中只有一个元素,令参与者2别无选择。

弈可能会有多个纳什均衡,但惟一的子博弈精炼纳什均衡就是与逆向归纳解相对应的均衡。正如我们在第1.1.C节中所观察到的,有些博弈会有多个纳什均衡,但有一个均衡明显占优,成为博弈的解。

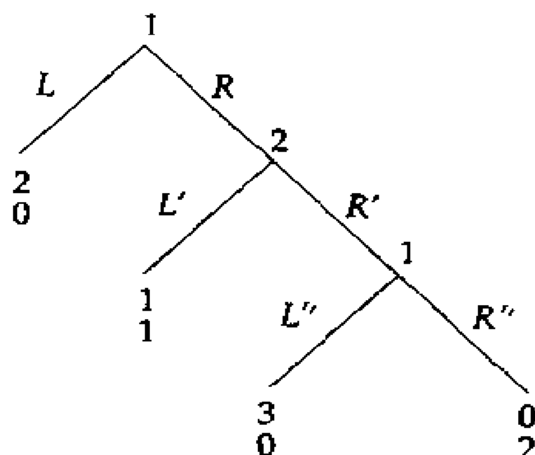
本节的最后,我们探讨逆向归纳法背后的理性假定。考虑下面的三步博弈,其中参与者1有两次行动:

1. 参与者1选择 $L$ 或 $R$,其中 $L$ 使博弈结束,参与者1的收益为2,参与者2的收益为0;

2. 参与者2观测参与者1的选择,如果1选择 $R$,则2选择 $L'$ 或 $R'$,其中 $L'$ 使博弈结束,两人的收益均为1;

3. 参与者1观测2的选择(并且回忆在第一阶段时自己的选择)。如果前两阶段的选择分别为 $R$ 和 $R'$,则1可选择 $L''$ 或 $R''$,每一选择都将结束博弈,$L''$时参与者1的收益为3,2的收益为0,如选 $R''$,两人的收益分别为0和2。

上面的语言描述可以用如下简明的博弈树表示(这是博弈的扩展式表述,我们将在第2.4节进行更一般的讨论)。博弈树上每一枝的末端都有两个收益值,上面代表参与者1的收益,下面代表参与者2的收益。




为计算出这一博弈的逆向归纳解,我们从第三阶段(即参与者1的第二次行动)开始。这里参与者1面临的选择是:$L''$可得收益3,$R''$可得收益0,于是 $L''$是最优的。那么在第二阶段,参与者2预测到一旦博弈进入到第三阶段,则参与者1会选择,这会使2的收益为0,从而参与者2在第二阶段的选择为:$L'$可得收益1,$R''$可得收益0,于是 $L'$是最优的。这样,在第一阶段,参与者1预测到如果博弈进入到第二阶段,2将选择 $L'$,使参与者1的收益为1,从而参与者1在第一阶段的选择是:$L$ 收益为2,$R$ 收益为1,于是 $L$ 是最优的。

上述过程求出博弈的逆向归纳解为，参与者1在第一阶段选择$L$，从而使博弈结束。即使逆向归纳预测博弈将在第一阶段结束，但论证过程的重要部分却是考虑如果博弈不在第一阶段结束时可能发生的情况。比如在第二阶段，当参与者2预测如果博弈进入第三阶段，则1会选择$L''$，这时2假定1是理性的。由于只有在1偏离了博弈的逆向归纳解，才能轮得到2选择行动，而这时2对1的理性假定便看似是矛盾的，即如果1在第一阶段选择了$R$，那么第二阶段2就不能再假定1是理性的了。但这种理解是不对的：如果1在第一阶段选择了$R$，则两个参与者都是理性的就不可能是共同知识，但这时1仍有理由在第一阶段选择$R$，却不与2对1的理性假定相矛盾。[①] 一种可能是"参与者1是理性的"是共同知识，但"参与者2是理性的"却不是共同知识：如果1认为2可能不是理性的，则1就可能在第一阶段选择$R$，希望2在第二阶段选择$R'$，从而给1以机会在第三阶段选择$L''$。另一种可能是"参与者2是理性的"是共同知识，但"参与者1是理性的"却不是共同知识：如果1是理性的，但推测2可能认为1是非理性的，这时1也可能在第一阶段选择$R$，希望2会认为1是非理性的而在第二阶段选择$R'$，期望1能在第三阶段选择$R''$。逆向归纳中关于1在第一阶段选择$R$的假定可通过上面的情况得到解释。不过在有些博弈中，对1选择了$R$的更为合理的假定是1确实是非理性的。在这样的博弈中，逆向归纳在预测博弈进行方面就会失去其大部分作用，正像在博弈论不能提供惟一解并不能达成协议的博弈中，纳什均衡也对预测博弈的结果所助无几。

### 2.1.B　斯塔克尔贝里双头垄断模型

斯塔克尔贝里(1934)提出一个双头垄断的动态模型，其中一个支配企业(领导者)首先行动，然后从属企业(追随者)行动。比如在美国汽车产业发展史中的某些阶段，通用汽车就扮演过这种领导者的角色(这一例子把模型直接扩展到允许不止一个追随企业，如福特、克莱斯勒等等)。根据斯塔克尔贝里的假定，模型中的企业选择其产量，这一点和古诺模型是一致的(只不过古诺模型中企业是同时行动的，不同于这里的序贯行动)。至于在类似于贝特兰德模型中企业(同时地)选择价格的假定下，如何构建相似的序贯行动模型，我们留作习题请读者自己练习。

---

① 回想我们在重复剔除严格劣战略的讨论时(在第1.1.B节)，参与者是理性的是共同知识，如果所有参与者都是理性的，并且所有参与者都知道所有参与者都是理性的，并且所有参与者都知道所有参与者都知道所有参与者都是理性的，如此等等，以至无穷。

博弈的时间顺序如下:(1)企业 1 选择产量 $q\geq 0$;(2)企业 2 观测到 $q_1$,然后选择产量 $q_2\geq 0$;(3)企业 $i$ 的收益由下面的利润函数给出

$$\pi_i(q_i,q_j)=q_i[(Q)-c]\ .$$

这里 $p(Q)=a-Q$,是市场上的总产品 $Q=q_1+q_2$ 时的市场出清价格,$c$ 是生产的边际成本,为一常数(固定成本为 0)。

为解出这一博弈的逆向归纳解,我们首先计算企业 2 对企业 1 任意产量的最优反应,$R_2(q_1)$ 应满足

$$\max_{q_2\geq 0}\pi_2(q_1,q_2)=\max_{q_2\geq 0}q_2[a-q_1-q_2-c]\ ,$$

由上式可得

$$R_2(q_1)=\frac{a-q_1-c}{2}\ ,$$

已知 $q_1<a-c$,在第 1.2.A 节我们分析同时行动的古诺博弈中,得出的 $R_2(q_1)$ 和上式完全一致,两者的不同之处在于这里的 $R_2(q_1)$ 是企业 2 对企业 1 已观测到的产量的真实反应,而在古诺的分析中,$R_2(q_1)$ 是企业 2 对假定的企业 1 的产量的最优反应,且企业 1 的产量选择是和企业 2 同时作出的。

由于企业 1 也能够像企业 2 一样解出企业 2 的最优反应,企业 1 就可以预测到他如选择 $q_1$,企业 2 将根据 $R_2(q_1)$ 选择的产量。那么,在博弈的第一阶段,企业 1 的问题就可表示为

$$\max_{q_1\geq 0}\pi_1(q_1,R_2(q_1))=\max_{q_1\geq 0}q_1[a-q_1-R_2(q_1)-c]$$

$$=\max_{q_1\geq 0}q_1\frac{a-q_1-c}{2}\ .$$

由上式可得

$$q_1^*=\frac{a-c}{2}$$

及

$$R_2(q_1^*)=\frac{a-c}{4}\ ,$$

这就是斯塔克尔贝里双头垄断博弈的逆向归纳解。[①]

回顾在第 1 章古诺博弈的纳什均衡中,每一企业的产量为 $(a-c)/3$,也就是说,斯塔克尔贝里博弈中逆向归纳解的总产量 $3(a-c)/4$,比古诺博弈中纳什均衡的总产量 $2(a-c)/3$ 要高,从而斯塔克尔贝里博弈相应的市

---

① 正如"古诺均衡"和"贝特兰德均衡"一般是指古诺和贝特兰德博弈中的纳什均衡,提及"斯塔克尔贝里均衡"一般表示序贯行动博弈,用以和同时行动相区别。但如前一节提到过的,序贯行动博弈有时会有多个纳什均衡,只有一个是和博弈的逆向归纳解相关的,这样"斯塔克尔贝里均衡"就有了双重含义,既表示博弈的序贯行动特点,又用来表示比简单纳什均衡条件更强的解的概念。

场出清价格就比较低。不过在斯塔克尔贝里博弈中，企业 1 完全可以选择古诺均衡产量 $(a-c)/3$，这时企业 2 的最优反应同样是古诺均衡的产量，也就是说在斯塔克尔贝里博弈中，企业 1 完全可以使利润水平达到古诺均衡的水平，而却选择了其他产量，那么企业 1 在斯塔克尔贝里博弈中的利润一定高于其在古诺博弈中的利润。但斯塔克尔贝里博弈中的市场出清价格降低了，从而总利润水平也会下降，那么和古诺博弈的结果相比，在斯塔克尔贝里博弈中，企业 1 利润的增加必定意味着企业 2 福利的恶化。

和古诺博弈相比，斯塔克尔贝里博弈中企业 2 利润水平的降低，揭示了单人决策问题和多人决策问题的一个重要不同之处。在单人决策理论中，占有更多的信息决不会对决策制定者带来不利，然而在博弈论中，了解更多的信息（或更为精确地说，是让其他参加者知道一个人掌握更多的信息）却可以让一个参与者受损。

在斯塔克尔贝里博弈中，存在问题的信息是企业的产量：企业 2 知道 $q_1$，并且（重要的是）企业 1 知道企业 2 知道 $q_1$。为看清楚这一信息的影响，我们把上面序贯行动的博弈稍作修改，假设企业 1 先选择 $q_1$，之后企业 2 选择 $q_2$，但事前并没有观测到 $q_1$。如果企业 2 确信企业 1 选择了它的斯塔克尔贝里产量 $q_1^* = (a-c)/2$，则企业 2 的最优反应仍是 $R_2^*(q_1^*) = (a-c)/4$。但是，如果企业 1 预测到企业 2 将持有这一推断并选择这一产量，企业 1 就会倾向于它对 $(a-c)/4$ 的最优反应——即 $3(a-c)/8$——而不愿去选择斯塔克尔贝里产量 $(a-c)/2$，那么企业 2 就不会相信企业 1 选择了斯塔克尔贝里产量。从而这一修改过的序贯行动博弈的惟一纳什均衡，对两个企业都是选择产量 $(a-c)/3$——这正是古诺博弈中的纳什均衡，其中企业是同时行动的。[①] 亦即，使企业 1 知道，企业 2 知道 $q_1$ 给企业 2 带来了损失。

### 2.1.C　有工会企业的工资和就业

在里昂惕夫（1946）模型中，讨论了一个企业和一个垄断的工会组织（即作为企业劳动力惟一供给者的工会组织）的相互关系：工会对工资水平说一不二，但企业却可以自主决定就业人数（在更符合现实情况的模型中，企业和工会间就工资水平讨价还价，但企业仍自主决定就业，得到的定性结果与本模型相似）。工会的效用函数为 $U(w, L)$，其中 $w$ 为工会向企业开出的

---

① 此例也说明了，我们在第 1.1.A 节中作出的一个结论：在标准式博弈中，参与者同时选择各自的战略，但这并不要求各方必须同时行动；只要每个人在选择自己的行动时不知道其他人的选择就足够了。关于这一点的进一步讨论参见第 2.4.A 节。

工资水平，$L$ 为就业人数。假定 $U(w,L)$ 是 $w$ 和 $L$ 的增函数。企业的利润函数为 $\pi(w,L)=R(L)-wL$，其中 $R(L)$ 为企业雇佣 $L$ 名工人可以取得的收入（在最优的生产和产品市场决策下），假定 $R(L)$ 是增函数，并且为凹函数(concave)。

假定博弈的时序为：(1)工会给出需要的工资水平 $w$；(2)企业观测到（并接受）$w$，随后选择雇佣人数 $L$；(3)收益分别为 $U(w,L)$ 和 $\pi(w,L)$。即使没有假定 $U(w,L)$ 和 $R(L)$ 的具体的表达式，从而无法明确解出该博弈的逆向归纳解，但我们仍可以就解的主要特征进行讨论。

首先，对工会在第一阶段任意一个工资水平 $w$，我们能够分析在第二阶段企业最优反应 $L^*(w)$ 的特征。给定 $w$，企业选择 $L^*(w)$ 满足下式：

$$\max_{L\geq 0}\pi(w,L)=\max_{L\geq 0}R(L)-wL\quad,$$

一阶条件为

$$R'(L)-w=0\ .$$

为保证一阶条件 $R'(L)-w=0$ 有解，假定 $R'(0)=\infty$，且 $R'(\infty)=0$，如图 2.1.1 所示。

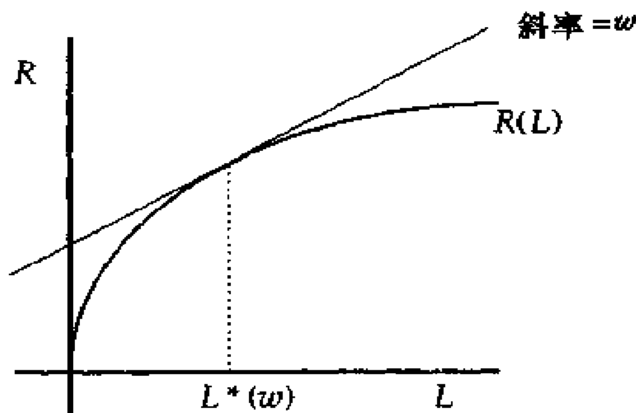
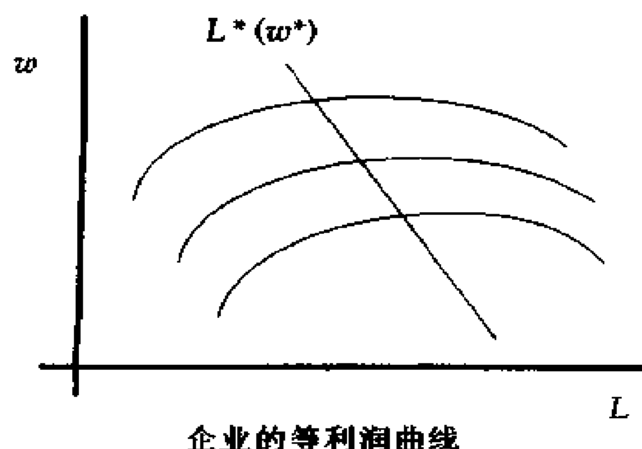



图 2.1.1

图 2.1.2 把 $L^*(w)$ 表示为 $w$ 的函数（但坐标轴经过旋转，以便于和以后的数据相比较），并表示出它和企业每条等利润线交于其最高点。[①] 若令

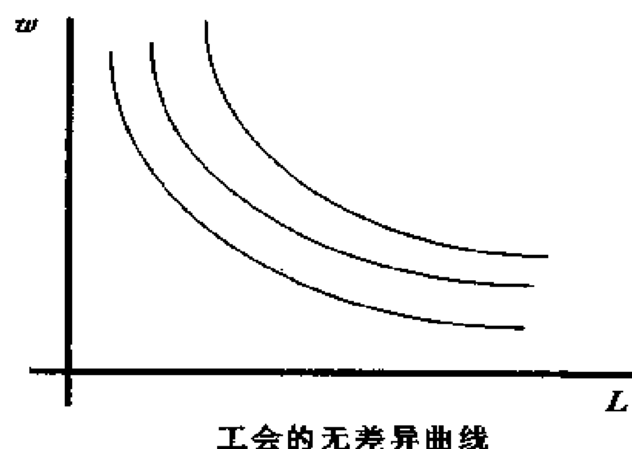
① 后面一点只不过是 $L^*(w)$ 定义的另一种表述，即对给定的 $w$，$L^*(w)$ 使 $\pi(w,L)$ 最大化。比如工会开价 $w'$，则企业沿 $w-w'$ 的水平线选择 $L$，而企业选择的就业 $L$ 能使可能的利润达到最高，从而使通过 $(L,w')$ 的等利润曲线与约束 $w=w'$ 相切。

$L$ 保持不变，$w$ 降低时企业的利润就会提高，于是较低的等利润曲线代表了较高的利润水平。图 2.1.3 描述了工会的无差异曲线，若令 $L$ 不变，当 $w$ 提高时工会的福利就会增加，于是较高的无差异曲线代表了工会较高的效用水平。




企业的等利润曲线

图 2.1.2




工会的无差异曲线

图 2.1.3

下面我们分析工会在第一阶段的问题，由于工会和企业同样可以解出企业在第二阶段的问题，工会就可预测到如果它要求的工资水平为 $w_1$，企业最优反应的就业人数将会是 $L^*(w_1)$。那么，工会在第一阶段的问题可以表示为：

$$\max_{w\geq 0} U(w, L^*(w)) .$$

表现在图 2.1.3 的无差异曲线上就是，工会希望选择一个工资水平

$w$，由此得到的结果$(w, L^*(w))$处于可能达到的最高的无差异线上。这一最优化问题的解为$w^*$，这样一个工资要求将使得工会通过$(w^*, L^*(w^*))$的无差异曲线与$L^*(w)$相切于该点，如图 2.1.4 所示。从而，$(W^*, L^*(w^*))$ 就是这一工资与就业博弈的逆向归纳解。

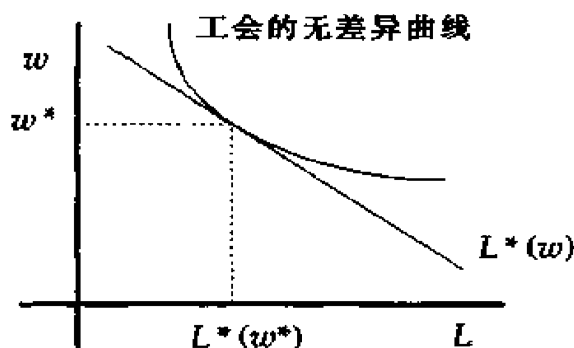



图 2.1.4

更进一步我们还可以看出，$(w^*, L^*(w^*))$是低效率的，在图 2.1.5 中，如果$w$和$L$处于图中阴影部分以内，企业和工会的效用水平都会提高。这种低效率对实践中企业对雇佣工人数量保持的绝对控制权提出了质疑。(允许工人和企业就工资相互讨价还价，但企业仍对雇佣工人数量绝对控制，也会得到相似的低效率解)。埃斯皮诺萨和里(Espinosa & Rhee, 1989)基于如下事实为这一质疑提供了一个解释：企业和工会之间经常会进行定期或不定期的重复谈判(在美国经常是每三年一次)，在这样的重复博弈中，可能会存在一个均衡，使得工会的选择$w$和企业的选择$L$都在图 2.1.5 所示的阴影部分以内，即使在每一次性谈判中，这样的$w$和$L$都不是逆向归纳解。参见第 2.3 节中关于重复博弈的讨论，以及习题 2.16 对埃斯皮诺萨和里模型的分析。

### 2.1.D 序贯谈判

我们首先分析一个三阶谈判模型，它属于第 2.1.A 节分析过的博弈模型，然后我们讨论鲁宾斯坦(1982)模型，其中博弈的(潜在)阶段数是无限的。在所有两个模型中，都可马上得到谈判结果——不可能发生持久的谈判(如罢工)。与此相反，在索贝尔和高桥(Sobel & Takahashi 1983)关于非对称信息下的序贯谈判模型中，罢工的发生以正概率存在于惟一的(精炼贝叶斯)均衡之中，参见第 4.3.B 节。

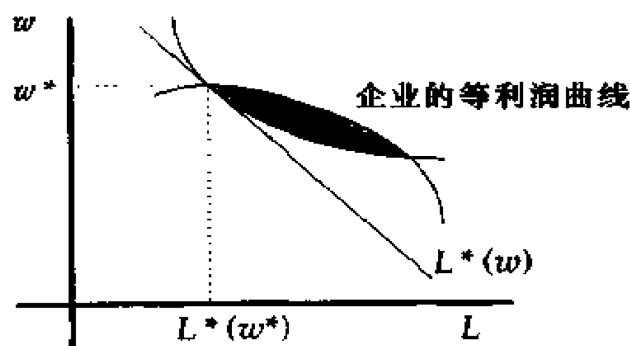



图2.1.5

参与人1和2就一美元的分配进行谈判。他们轮流提出方案：首先参与人1提出一个分配建议，参与人2可以接受或拒绝；如果参与人2拒绝，就由参与人2提出分配建议，参与人1选择接受或拒绝；如此一直进行下去。一个条件一旦被拒绝，它就不再有任何约束力，并和博弈下面的进行不再相关。每一个条件都代表一个阶段，参与人都没有足够的耐心：他们对后面阶段得到的收益进行贴现，每一阶段的贴现因子为 $\delta$，这里 $0<\delta<1$。[①]

下面是对三阶段谈判博弈时序的更为详细的描述：

(1a)在第一阶段开始时，参与人1建议他分走1美元的 $s_1$，留给参与人2的份额为 $1-s_1$；

(1b)参与人2或者接受这一条件(这种情况下，博弈结束，参与人1的收益为 $s_1$，参与人2的收益为 $1-s_1$，都可立刻拿到)，或者拒绝这一条件(这种情况下，博弈将继续进行，进入第二阶段)；

(2a)在第二阶段的开始，参与人2提议参与人1分得1美元的 $s_2$，留给参与人2的份额为 $1-s_1$(请注意在阶段 $t$，$s_t$ 总是表示分给参与人1的，而不论是谁先提出的条件)；

(2b)参与人1或者接受条件(这种情况下，博弈结束，参与人1的收益 $s_2$ 和参与人2的收益 $1-s_2$ 都可立即拿到)，或者拒绝这一条件(这种情况下，博弈继续进行，进入第三阶段)；

(3)在第三阶段的开始，参与人1得到1美元的 $s$，参与人2得到 $1-s$，

① 贴现因子 $\delta$ 反映了货币的时间价值。在一个阶段开始时取得的一美元可以存入银行，赚取利息，比如说每期利息为 $r$，则在下一阶段开始时的价值就成为 $1+r$ 美元。同样，下一阶段开始时要得到的一美元，现在的价值只有 $1/(1+r)$美元。令 $\delta=1/(1+r)$，则下一阶段可得到的收益 $\pi$ 现值只有 $\delta\pi$，距现在两个阶段之后得到的收益 $\pi$ 现值只有 $\delta^2\pi$，如此等等。未来收益今天的价值称为这一收益的现值。

这里 $0<s<1$。

在这样的三阶段博弈中，第三阶段的解决方案 $(s, 1-s)$ 是外生给定的。在我们后面将考虑的无限期模型中，第三阶段的收益 $s$ 将表示如果博弈进行到第三阶段（即如果前面两个提议都被拒绝）的话，参与人 1 在其后进行的博弈中可得到的收益。

为解出此三阶段博弈的逆向归纳解，首先需要计算如果博弈进行到第二阶段，参与人 2 可能提出的最优条件。参与人 1 拒绝参与人 2 在这一阶段的条件 $s_2$，可以在第三阶段得到 $s$，但下一阶段的 $s$ 在当期的价值只有 $\delta s$。那么，当且仅当 $s_2 \geqslant \delta \cdot s$，参与人 1 才会接受 $s_2$（我们假定当接受和拒绝并无差异时，参与人总是选择接受条件）。从而参与人 2 在第二阶段的决策问题就可归于在本阶段收入 $1-\delta \cdot s$（通过向参与人 1 提出条件，给他 $s_2 = \delta \cdot s$）和下阶段收入 $1-s$（通过向参与人 1 提出条件，给他任意的 $s_2 < \delta \cdot s$）之间作出选择。后一选择的贴现值为 $\delta \cdot (1-s)$，小于前一选择可得的 $1-\delta \cdot s$，于是参与人 2 在第二阶段可以提出的最优条件是 $s_2^* = \delta \cdot s$。也就是说，如果博弈进行到第二阶段，参与人 2 将提出条件 $s_2^*$，参与人 1 选择接受条件。

由于参与人 1 可以和参与人 2 同样地解出参与人 2 在第二阶段的决策问题，参与人 1 也就知道参与人 2 通过拒绝参与人 1 的条件，在第二阶段可以得到 $1-s_2^*$，但下一阶段得到的 $1-s_2^*$ 在本阶段的价值只有 $\delta \cdot (1-s_2^*)$。那么，当且仅当 $1-s_1 \geqslant \delta \cdot (1-s_2^*)$ 或 $s_1 \leqslant 1-\delta \cdot (1-s_2^*)$ 时，参与人 2 才会接受 $1-s_1$。从而参与人 1 在第一阶段的决策问题就可归于在本阶段收入 $1-\delta \cdot (1-s_2^*)$（通过向参与人 2 提出条件 $1-s=\delta \cdot (1-s_2^*)$）和下阶段收入 $s_2^*$（通过向参与人 2 提出出任意的 $1-s_1 < \delta \cdot (1-s_2^*)$）之间作出选择。后一选择的贴现值为 $\delta \cdot s_2^* = \delta^2 \cdot s$，小于前一选择可得的 $1-\delta \cdot (1-s_2^*) = 1-\delta(1-\delta \cdot s)$，于是参与人 1 在第一阶段提出的最优条件是 $s_1^* = 1-\delta \cdot (1-s_2^*) = 1-\delta(1-\delta \cdot s)$。这样，在此三阶段博弈的逆向归纳解中，参与人 1 向参与人 2 提出分配方案 $(s_1^*, 1-s_1^*)$，后者接受该方案。

现在考虑无限期的情况。博弈时序和前面的描述完全一致，只是第(3)阶段给出的外生解决方案被其后的无限步讨价还价(3a)、(3b)、(4a)、(4b)等等所代替：奇数步由参与人 1 出条件，偶数步由参与人 2 出条件，直至一方接受条件，讨价还价结束。和前面分析过的所有应用一样，我们希望能够从后向前推出这一无限步博弈的逆向归纳解。但是，由于博弈可能会无限地进行下去，因此并不存在我们借以入手分析的最后一步行动。幸而下面

的发现(首先由谢克德和萨顿(Shaked&Sutton, 1984)所运用),使我们可以把无限博弈截开,并应用对有限博弈分析的逻辑进行分析:从第三阶段开始的博弈(如果能进行到这一阶段)与(从第一阶段开始的)整个过程的博弈是相同的——两种情况下,都是由参与人 1 首先提出条件,其后两个参与人轮流出价,直至有一方接受条件谈判结束。

由于尚未正式定义此类无限博弈的逆向归纳解,我们的讨论也将是非正式的(但也可以进行正式讨论)。假设完整过程的博弈存在逆向归纳解,此时参与人 1 和 2 分别得到 $s$ 和 $1-s$。我们可以把这个结果用于从第三阶段开始的博弈,如果博弈进行到第三阶段的话,然后逆向推至第一阶段(过程与三阶段博弈中相同),可计算出整个博弈的新的逆向归纳解。在这一新的逆向归纳解中,参与人 1 将在第一阶段提出解决方案$(f(s), 1-f(s))$,参与人 2 会接受这一方案。这里的 $f(s)=1-\delta(1-\delta\cdot s)$,就是上面讨论过的,在第三阶段解决方案$(s, 1-s)$外生给定条件下,参与人 1 第一阶段得到的份额。

令 $s_H$ 为参与人 1 在全过程博弈中可能得到的逆向归纳解下的最高收益。设想 $s_H$ 为参与人 1 第三阶段的收益,则如前所述,这将产生一个新的逆向归纳解,其中参与人 1 第一阶段的收益为 $f(s_H)$。由于 $f(s)=1-\delta+\delta^2 s$ 是 $s$ 的增函数,$s_H$ 是第三阶段可能达到的最高收益,$f(s_H)$ 也就是第一阶段可能达到的最高收益。但同时 $s_H$ 又是第一阶段可能达到的最高收益,于是有 $f(s_H)=s_H$。相似的论证可证明 $f(s_L)=s_L$,这里的 $s_L$ 为参与人 1 在全过程博弈中可能得到的逆向归纳解下的最低收益。满足 $f(s)=s$ 的惟一的 $s$ 值为 $1/(1+\delta)$,我们用 $s^*$ 表示。那么 $s_H=s_L=s^*$,于是整个过程博弈有惟一的逆向归纳解:在第一阶段,参与人 1 向参与人 2 提出分配方案$(s^*=1/(1+\delta), 1-s^*=\delta/(1+\delta))$,后者接受该方案。

## 2.2　完全非完美信息两阶段博弈

### 2.2.A　理论:子博弈精炼

现在我们对前一节所讨论的博弈类型加以丰富。和在完全且完美信息动态博弈中相同,我们继续假定博弈的进行分为一系列的阶段,下一阶段开始前参与者可观察到前面所有阶段的行动。与上节分析的不同之处在于,本节我们每一阶段中存在着同时行动。在第 2.4 节更进一步的分析中我们

将看到，这种阶段内的同时行动意味着本节分析的博弈包含了不完美信息。然而，此类博弈和前一节所讨论的博弈又有着很多共同特性。

我们将分析以下类型的简单博弈，并(多么缺乏创意地)称其为完全非完美信息两阶段博弈：

1. 参与者 1 和 2 同时从各自的可行集 $A_1$ 和 $A_2$ 中选择行动 $a_1$ 和 $a_2$，
2. 参与者 3 和 4 观察到第一阶段的结果，$(a_1, a_2)$，然后同时从各自的可行集 $A_3$ 和 $A_4$ 中选择行动 $a_3$ 和 $a_4$，
3. 收益为 $u_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$， $i=1,2,3,4$。

许多经济学问题都符合以上的特点，[①] 其中三个例子(后面进行详细讨论)包括对银行的挤提、关税和国际市场的不完全竞争以及工作竞赛(如一个企业中，几个副总裁为下一任总裁而竞争)。还有很多经济问题可通过把以上条件稍加改动而建立模型，比如增加参与者人数或者允许同一参与者(在一个以上的阶段)多次选择行动。也可以允许少于四个的参与者；在一些应用中，参与者 3 和 4 就是参与者 1 和 2；还有的则不存在参与者 2 或参与者 4。

我们解决此类问题使用的方法，仍沿用了逆向归纳的思路，但这里从博弈的最后阶段逆向推导的第一步就包含了求解一个真正的博弈(给定第一阶段结果时，参与者 3 和 4 在第二阶段同时行动的博弈)，而不再是前一节求解单人最优化的决策问题。为使问题简化，本节中我们假设对第一阶段博弈每一个可能结果 $(a_1, a_2)$，其后(参与者 3 和 4 之间的)第二阶段博弈有惟一的纳什均衡，表示为 $(a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$。在第 2.3.A 节(关于重复博弈)我们考虑放松这一假定时的应用。

如果参与人 1 和 2 预测到参与人 3 和 4 在第二阶段的行动将由 $(a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$ 给出，则参与人 1 和 2 在第一阶段的问题就可用以下的同时行动博弈表示：

1. 参与人 1 和 2 同时从各自的可行集 $A_1$ 和 $A_2$ 中选择行动 $a_1$ 和 $a_2$；
2. 收益情况为 $u_i(a_1, a_2, a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$， $i=1,2$；

假定 $(a_1^*, a_2^*)$ 为以上同时行动博弈惟一的纳什均衡，我们称 $(a_1^*, a_2^*, a_3^*(a_1^*, a_2^*), a_4^*(a_1^*, a_2^*))$ 为这一两阶段博弈的子博弈精炼解。此解与完全且完美博弈中的逆向归纳解在性质上是一致的，并且与后者有着类似

---

① 和前一节中相同，参与者 3 和 4 在第二阶段的可行集 $A_3$ 和 $A_4$，可以依赖于第一阶段的结果 $(a_1, a_2)$，在特定条件下，可以存在 $(a_1, a_2)$ 使博弈结束。

的优点和不足。如果参与者 3 和 4 威胁在后面的第二阶段博弈中，他们将不选择纳什均衡下的行动，参与人 1 和 2 是不会相信的，因为当博弈确实进行到第二阶段时，参与人 3 和 4 中至少有一个人不愿把威胁变为现实（恰好是因为它不是第二阶段博弈的纳什均衡）。另一方面，假设参与者 1 就是参与者 3，并且参与者 1 在第一阶段并不选择 $a_1^*$，参与者 4 就会重新考虑参与者 3（即参与者 1）在第二阶段将会选择 $a_3^*(a_1, a_2)$ 的假定。

### 2.2.B 对银行的挤提

两个投资者每人存入银行一笔存款 $D$，银行已将这些存款投入一个长期项目。如果在该项目到期前银行被迫对投资者变现，共可收回 $2r$，这里 $D > r > D/2$。不过，如果银行允许投资项目到期，则项目共可取得 $2R$，这里 $R > D$。

有两个日期，投资者可以从银行提款：日期 1 在银行的投资项目到期之前，日期 2 则在到期之后。为使分析简化，假设不存在贴现。如果两个投资者都在日期 1 提款，则每人可得到 $r$，博弈结束。如果只有一个投资者在日期 1 提款，他可得到 $D$，另一人得到 $2r - D$，博弈结束。如果两人都不在日期 1 提款，则项目结束后投资者在日期 2 进行提款决策。如果两个投资者都在日期 2 提款，则每人得到 $R$，博弈结束。如果只有一个投资者在日期 2 提款，则他得到 $2R - D$，另一人得到 $D$，博弈结束。最后，如果在日期 2 两个投资者都不提款，则银行向每个投资者返还 $R$，博弈结束。

我们将在第 2.4 节讨论此类博弈的正式表述方法，这里只是一般性地分析这一问题的解决思路。两个投资者在日期 1 和日期 2 的收益情况（作为他们在那时提款决策的函数），可以用下面的两个标准式博弈表示。注意这里日期 1 的标准式博弈是不规范的：如果在日期 1 两个投资者都选择不提款，则没有与之对应的收益，这时投资者要继续进行日期 2 的博弈。

| | 提款 | 不提 |
|---|---|---|
| 提款 | $r, r$ | $D, 2r - D$ |
| 不提 | $2r - D, D$ | 下一阶段 |

日期 1

| | 提款 | 不提 |
|---|---|---|
| 提款 | $R, R$ | $2R - D, D$ |
| 不提 | $D, 2R - D$ | $R, R$ |

日期 2

我们从后往前分析此博弈。先考虑日期 2 的标准式博弈。由于 $R > D$（并且由此可得 $2R - D > R$），"提款"严格优于"不提款"，那么这一博弈有惟一的纳什均衡：两个投资者都将提款，最终收益为 $(R, R)$。由于不存在贴现，我们可以直接用这一收益替入日期 1 的标准式博弈双方都不提款时

的情况,如图 2.2.1 所示。由于 $r < D$(并且由此可得 $2r - D < r$),这一由两阶段博弈变形得到的单阶段博弈存在两个纯战略纳什均衡:(1)两个投资者都提款,最终收益情况为 $(r, r)$;(2)两个投资者都不提款,最终收益为 $(R, R)$。从而,最初的两阶段银行挤提博弈就有两个子博弈精炼解(因此也不完全符合第 2.2.A 节所定义的博弈类型):(1)两个投资者都在日期 1 提款,两人的收益分别为 $(r, r)$;(2)两个投资者都不在日期 1 提款,而在日期 2 提款,两人在日期 2 的收益分别为 $(R, R)$。

| | 提款 | 不提 |
|---|---|---|
| 提款 | $r, r$ | $D, 2r-D$ |
| 不提 | $2r-D, D$ | $R, R$ |

图 2.2.1

前一种结果可以解释为对银行的一次挤提。如果投资者 1 相信投资者 2 将在日期 1 提款,则投资者 1 的最优反应也是去提款,即使他们等到日期 2 再去提款的话两人的福利都会提高。这里的银行挤提博弈在一个很重要的方面不同于第 1 章中讨论的囚徒困境:虽然两个博弈都存在一个对整个社会是低效率的纳什均衡;但在囚徒困境中这一均衡是惟一的(并且是参与者的严格占优战略),而在这里还同时存在另一个有效率的均衡。从而,这一模型并不能预测何时会发生对银行的挤提,但的确显示出挤提会作为一个均衡结果而出现。参见戴蒙德和迪布维格(1983)内容更丰富的模型。

## 2.2.C 关税和国际市场的不完全竞争

下面我们讨论国际经济学中的一个应用。考虑两个完全相同的国家。分别用 $i = 1, 2$ 表示。每个国家有一个政府负责确定关税税率,一个企业制造产品供给本国的消费者及出口,和一群消费者在国内市场购买本国企业或外国企业生产的产品。如果(国家 $i$ 的)市场上总产量为 $Q_i$,则市场出清价格为 $p_i(Q_i) = a - Q_i$,国家 $i$ 中的企业(后面称为企业 $i$)为国内市场生产 $h_i$,并出口 $e_i$,则 $Q = h_i + e_j$。企业的边际成本为常数 $c$,并且没有固定成本,从而,企业 $i$ 生产的总成本为 $C_i(h_i, e_i) = c(h_i + e_i)$,另外,产品出口时企业还要承担关税成本(费用):如果政府 $j$ 制定的关税税率为 $t_j$,企业 $i$ 向国家 $j$ 出口 $e_i$ 必须支付关税 $t_j e_i$ 给政府 $j$。

博弈的时间顺序如下:第一,政府同时选择关税税率 $t_1$ 和 $t_2$;第二,企业观察到关税税率,并同时选择其提供国内消费和出口的产量 $(h_1, e_1)$ 和 $(h_2, e_2)$;第三,企业 $i$ 的收益为其利润额,政府 $i$ 的收益则为本国总的福

利，其中国家 $i$ 的总福利是国家 $i$ 的消费者享受的消费者剩余、[①] 企业 $i$ 赚取的利润以及政府 $i$ 从企业 $j$ 收取的关税收入之和：

$$\pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j)=[a-(h_i+e_j)]h_i+[a-(e_i+h_j)]e_i - c(h_j+e_i)-t_je_i \quad ,$$

$$w_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j)=\frac{1}{2}Q_i^2+\pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j)+t_ie_j \; .$$

假设政府已选定的税率分别为 $t_1$ 和 $t_2$，如果 $(h_1^*,e_1^*,h_2^*,e_2^*)$ 为其余部分企业 1 和企业 2 的(两市场)博弈的纳什均衡，对每一个企业 $i$，$(h_i^*,e_i^*)$ 必须满足

$$\max_{h_i,e_i}\pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j^*,e_j^*) \; .$$

由于 $\pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j^*,e_j^*)$ 可以表示为企业 $i$ 在市场 $i$ 的利润与在市场 $j$ 的利润之和，而企业 $i$ 在市场 $i$ 的利润只是 $h_j$ 和 $e_j^*$ 的函数，在市场 $j$ 的利润又只是 $e_i$，$h_j^*$ 和 $t_j$ 的函数，企业 $i$ 在两市场的最优化问题就可以简单地拆分为一对问题，在每个市场分别求解：$h_i^*$ 必须满足：

$$\max_{h_i\geqslant 0}h_i[a-(h_i+e_j^*)-c] \; ,$$

且 $e_i^*$ 必须满足

$$\max_{e_i\geqslant 0}e_i[a-(e_i+h_j^*)-c]-t_je_j \; .$$

假设 $e_j^*\leqslant a-c$，可得

$$h_i^*=\frac{1}{2}(a-e_j^*-c) \; . \tag{2.2.1}$$

同时假设 $h_j^*\leqslant a-c-t_j$，可得

$$e_i^*=\frac{1}{2}(a-h_j^*-c-t_j) \; . \tag{2.2.2}$$

(从我们求得的结果来看，和上面两个假设是相符的)对每一个 $i=1,2$，都必须同时满足(2.2.1)和(2.2.2)两个最优反应函数，从而我们对四个未知数 $(h_1^*,e_1^*,h_2^*,e_2^*)$ 就得到了四个方程式。但由于这四个方程可分为两组，每两个方程包含两个未知数，求解十分容易。其解为：

$$h_i^*=\frac{a-c+t_i}{3} \text{ 且 } e_i^*=\frac{a-c-2t_i}{3} \; . \tag{2.2.3}$$

---

① 如果消费者用 $p$ 的价格购买一件他愿意出价钱 $v$ 的商品，则他享受到 $v-p$ 的剩余。给定反需求函数 $P_i(Q_i)=a-Q_i$，如果市场 $i$ 销售的总产量为 $Q_i$，则总的消费者剩余可表示为 $(1/2)Q_i^2$。

比较第 1.2.A 节的古诺博弈中，两个企业选择的均衡产出都是$(a-c)/3$，但这一结果是基于对称的边际成本而推出的。而(2.2.3)式的均衡结果与之不同的是，政府对关税的选择使企业的边际成本不再对称（正如习题 1.6 的情况），例如在市场 $i$，企业 $i$ 的边际成本是 $c$，但企业 $j$ 的边际成本则是 $c+t_i$。由于企业 $j$ 的成本较高，它意愿的产出也相对较低。但如果企业 $j$ 要降低产出，市场出清价格又会相应提高，于是企业 $i$ 又倾向于提高产出，这种情况下，企业 $j$ 的产量就又会降低。结果就是在均衡条件下，$h_i^*$ 随 $t_i$ 的提高而上升，$e_j^*$ 随 $t_i$ 的提高而（以更快的速度）下降。这一点可以从(2.2.3)式的结果中明白看出。

在解出了政府选定关税时，其后第二阶段两企业博弈的结果之后，我们可以把第一阶段政府间的互动决策表示为以下的同时行动博弈：首先，政府同时选择关税税率 $t_1$ 和 $t_2$；第二，政府 $i$ 的收益为 $W_i(t_i, t_j, h_1^*, e_1^*, h_2^*, e_2^*)$，$i=1,2$，这里 $h_i^*$ 和 $e_i^*$ 是(2.2.3)式所表示的 $t_i$ 和 $t_j$ 的函数。现在我们求解这一政府间博弈的纳什均衡。

为简化使用的表示符号，我们把 $h_i^*$ 决定于 $t_i$，$e_i^*$ 决定于 $t_j$ 隐于式中：令 $W_i^*(t_i, t_j)$表示 $W_i(t_i, t_j, h_1^*, e_1^*, h_2^*, e_2^*)$，即当政府 $i$ 选择关税 $t_i$，政府 $j$ 选择关税 $t_j$，企业 $i$ 和 $j$ 按(2.2.3)式中的纳什均衡选择行动时政府 $i$ 的收益。如果$(t_1^*, t_2^*)$是这一政府间博弈的纳什均衡，则对每一个 $i$，$t_i^*$ 必须满足

$$\max_{t_i \geq 0} W_i^*(t_i, t_j^*) .$$

但 $W_i^*(t_i, t_j^*)$又等于

$$\frac{(2(a-c)-t_i)^2}{18}+\frac{(a-c+t_i)^2}{9}+\frac{(a-c-2t_j^*)^2}{9}+\frac{t_i(a-c-2t_i)}{3},$$

于是

$$t_i^* = \frac{a-c}{3}$$

这一结果对每一个 $i$ 都成立，并不依赖于 $t_j^*$。也就是说，在本模型中，选择$(a-c)/3$ 的关税税率对每个政府都是占优战略（在其他模型中，比如当边际成本递增时，政府的均衡战略就不是占优战略）。把 $t_i^*=t_j^*=(a-c)/3$ 代入(2.2.3)式可得

$$h_i^* = \frac{4(a-c)}{9} \qquad 且 \qquad e_i^* = \frac{a-c}{9}$$

这就得到企业第二阶段所选择的产出，至此，我们已求得这一关税博弈的子博弈精炼解为：$(t_1^*=t_2^*=(a-c)/3, h_1^*=h_2^*=4(a-c)/9, e_1^*=e_2^*=(a$

$-c)/9$)。

在子博弈精炼解中，每一市场上的总产量为 $5(a-c)/9$。进一步分析我们会发现，如果政府选择的关税税率为 0，则每一市场上的总产量将为 $2(a-c)/3$，等于古诺模型的结果。从而，市场 $i$ 的消费者剩余(上注中已说明，它简单地等于市场 $i$ 的总产量平方的一半)，在政府选择其占优战略时，比选择 0 关税税率时要低，事实上，为 0 的关税税率是社会最优选择，因为 $t_1=t_2=0$ 是下式的解

$$\max_{t_1,t_2\geqslant 0} W_1^*(t_1,t_2)+W_2^*(t_2,t_1).$$

于是，政府就有动因签订一个相互承诺 0 关税税率的协定(即自由贸易)。(如果负关税税率，即补贴，是可行的，社会最优化的条件是政府选择 $t_1=t_2=-(a-c)$，这使得国内企业为本国消费者提供的产出为 0，并向另一国家出口完全竞争条件下的产量)这样，由于企业 $i$ 和 $j$ 在第二阶段将按(2.2.3)给出的纳什均衡结果行动，政府在第一阶段的互动决策就成为囚徒困境式的问题：惟一的纳什均衡是其占优战略，但对整个社会却是低效率的。

## 2.2.D　工作竞赛

考虑为同一老板工作的两个工人，工人 $i$(其中 $i$ 等于 1 或 2)生产的产出 $y_i=e_i+\varepsilon_i$，其中 $e_i$ 是努力程度，$\varepsilon_i$ 是随机扰动项。生产的程序如下：第一，两个工人同时选择非负的努力水平 $e_i\geqslant 0$；第二，随机扰动项 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 相互独立，并服从期望值为 0、密度函数为 $f(\varepsilon)$的概率分布；第三，工人的产出可以观测，但各自选择的努力水平无法观测，从而工人的工资可以决定于各人的产出，却无法(直接)取决于其努力水平。

假设老板为激励工人努力工作，而在他们中间开展工作竞赛，参见拉齐尔和罗森(1981)首先建立的分析模型[①]。工作竞赛的优胜者(即产出水平较高的工人)获得的工资为 $w_H$；失败者的工资为 $w_L$。工人获得工资水平 $w$ 并付出努力程度 $e$ 时的收益为 $u(w,e)=w-g(e)$，其中 $g(e)$表示努力工作带来的负效用，是递增的凸函数(即 $g'(e)>0$ 且 $g''(e)>0$)。老板的收益为 $y_1+y_2-w_H-w_L$。

现在我们套用对第 2.2.A 节博弈类型的讨论思路来分析这一应用。

---

① 为使对这一应用的分析保持简洁，我们略去了几个技术细节，比如保证工人的一阶条件充分性的条件。不过，分析过程仍比前面的例子涉及到更多的概率论知识。读者也可以跳过这一应用，而不会影响理解的连贯性。

老板为参与者 1,他的行动 $a_1$ 是选择工作竞赛中的工资水平 $w_H$ 和 $w_L$,这里不存在参与者 2。两个工人是参与者 3 和 4,他们观测第一阶段选定的工资水平,然后同时选择行动 $a_3$ 和 $a_4$,具体地说就是选定的努力程度 $e_1$ 和 $e_2$。(后面我们将考虑另一种可能性,就是对老板选定的工资水平,工人们不愿意参与工作竞赛,却转而寻找另外的工作机会)最后,参与者各自的收益如前面所给出。由于产出(并由此而使工资)不只是参与者行动的函数,而且同时还受随机扰动因素 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 的影响,我们用参与者的期望收益进行分析。

假定老板已选定了工资水平 $w_H$ 和 $w_L$,如果一对努力水平 $(e_1^*, e_2^*)$ 是第二阶段两工人博弈的纳什均衡,则对每个 $i$, $e_i^*$ 必须使工人的期望工资减去努力带来的负效用后的净收益最大,亦即 $e_i^*$ 必须满足:[①]

$$\max_{e_i \geq 0} w_H \text{Prob}\{y_i(e_i) > y_i(e_j^*)\} + w_L \text{Prob}\{y_i(e_i) \leqslant y_i(e_j^*)\} - g(e_i)$$

$$= (w_H - w_L)\text{Prob}\{y_i(e_i) > y_i(e_j^*)\} + w_L \quad g(e_i) \ . \tag{2.2.4}$$

其中 $y_i(e_i) = e_i + \varepsilon_i$。(2.2.4)的一阶条件为

$$(w_H - w_L)\frac{\partial \text{Prob}\{y_i(e_i) > y_i(e_j^*)\}}{\partial e_i} = g'(e_i) \ . \tag{2.2.5}$$

也就是说,工人 $i$ 选择努力程度 $e_i$,从而使得额外努力的边际负效用 $g'(e_i)$,等于增加努力的边际收益,后者又等于对优胜者的奖励工资 $w_H - w_L$,乘以因努力程度提高而使获胜概率的增加。

根据贝叶斯法则[②]

$$\text{Prob}\{y_i(e_i) > y_i(e_j^*)\} = \text{Prob}\{\varepsilon_j > e_j^* + \varepsilon_j - e_i\}$$

$$= \int_{\varepsilon_j} \text{Prob}\{\varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j - e_i \mid \varepsilon_j\} f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j$$

$$= \int_{\varepsilon_j} [1 - F(e_j^* - e_i + \varepsilon_j)] f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j \quad ,$$

于是,一阶条件(2.2.5)可化为

---

① 在(2.2.4)式中,我们隐含了一个前提,即假定随机扰动项的密度 $f(\varepsilon)$ 满足两个工人产出水平刚好相等的概率为 0,从而在求得工人 $i$ 期望效用时不必考虑这种情况。(较正式地说,我们假定密度函数 $f(\varepsilon)$ 没有奇点)在对工作竞赛的完全分析中,专门分析由掷硬币决定优胜者或(在本模型中是等价的)每个工人得到 $(w_H + w_L)/2$ 的情况是十分自然的(但对结果却无关紧要)。

② 贝叶斯法则提供了求 $p(A|B)$ 的公式,即给定事件 $B$ 已经发生条件下事件 $A$ 发生的(条件)概率。令 $p(A)$、$p(B)$ 和 $p(A,B)$ 分别表示 $A$ 发生、$B$ 发生和 $A$、$B$ 同时发生的(先验)概率(即 $A$ 和 $B$ 都没有机会发生前的主观概率)。贝叶斯法则证明 $p(A|B) = p(A,B)/p(B)$。也就是说,$B$ 发生时 $A$ 发生的条件概率等于 $A$ 和 $B$ 同时发生的概率除以 $B$ 发生的先验概率。

$$(w_H - w_L)\int_{\epsilon_j} f(e_j^* - e_i + \epsilon_j)f(\epsilon_j)d\epsilon_j = g'(e_i) \ .$$

在对称的纳什均衡(即 $e_1^* = e_2^* = e^*$),我们有

$$(w_H - w_L)\int_{\epsilon_j} f(\epsilon_j)^2 d\epsilon_j = g'(e^*) \ . \tag{2.2.6}$$

由于 $g(e)$是凸函数,优胜获得的奖励越高(即 $w_H - w_L$ 的值越大),就会激发更大的努力,这和我们的直觉是一致的。另一方面,在同样的奖励水平下,对产出的随机扰动因素越大,越不值得努力工作,因为这时工作竞赛的最终结果在很大程度上是决定于运气,而非努力程度。例如,当 $\epsilon$ 服从方差为 $\sigma^2$ 的正态分布时,则有

$$\int_{\epsilon_j} f(\epsilon_j)^2 d\epsilon_j = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \ .$$

它随 $\sigma$ 的增加而下降,也就是说 $e^*$ 的确随 $\sigma$ 的增加而降低。

下面我们从后往前分析博弈的第一阶段。假定工人们同意参加工作竞赛(而不是去另谋高就),他们对给定的 $w_H$ 和 $w_L$ 的反应,将会是(2.2.6)描述的对称的纳什均衡战略。(从而我们忽略掉存在不对称均衡的可能性,以及工人的努力程度由角解 $e_1 = e_2 = 0$ 而不是由一阶条件(2.2.5)给出的可能性)同时假定工人可寻求其他就业机会,得到的效用为 $U_a$。因为在对称的纳什均衡中每个工人在竞赛中获得优胜的概率为 1/2(即)$\text{Prob}\{y_i(e^*) > y_i(e^*)\} = 1/2$),如果老板要使工人有动力参加工作竞赛,则他必须选择满足下式的工资水平

$$\frac{1}{2}w_H + \frac{1}{2}w_L - g(e^*) \geqslant U_a \ . \tag{2.2.7}$$

假设 $U_a$ 足够低,以致于老板愿意激励工人参加竞赛,则他会在(2.2.7)的约束条件下,选择使自己期望收益 $2e^* - w_H - w_L$ 最大的工资水平。由于在最优条件下,(2.2.7)中的等号成立:

$$w_L = 2U_a + 2g(e^*) - w_H \ . \tag{2.2.8}$$

则期望利润就成为 $2e^* - 2U_a - 2g(e^*)$,于是老板要考虑的问题就是使 $e^* - g(e^*)$ 最大化,这时他选择的工资水平应使得与之相应的 $e^*$ 满足这一条件。从而最优选择下的努力程度满足一阶条件 $g'(e^*) = 1$,将其代入(2.2.6)则意味着最优激励 $w_H - w_L$ 满足

$$(w_H - w_L)\int_{\epsilon_j} f(\epsilon_j)^2 d\epsilon_j = 1$$

和(2.2.8)一起,可解得 $w_H$ 和 $w_L$ 的值。

# 2.3 重复博弈

本节我们分析在参与者之间长期重复的相互往来中,关于将来行动的威胁或承诺能否影响到当前的行动。大部分直观的结论是由两阶段的例子给出的,也有一些观点需要讨论无限次的情况。同时,我们还将定义重复博弈中子博弈精炼纳什均衡的概念,这一定义在重复博弈的条件下表述较容易理解,而在第2.4.B节分析一般的完全信息动态博弈中则要复杂一些。我们在本节先作一简要介绍,以方便后面的展开。

## 2.3.A 理论:两阶段重复博弈

考虑图2.3.1给出的囚徒困境的标准式,假设两个参与者要把这样一个同时行动博弈重复进行两次,且在第二次博弈开始之前可观测第一次进行的结果,并假设整个过程博弈的收益等于两阶段各自收益的简单相加(即不考虑贴现因素),我们称这一重复进行的博弈为两阶段囚徒困境。它属于第2.2.A节分析过的博弈类型,这里参与者3、4与参与者1、2是相同的,行动空间$A_3$和$A_4$也与$A_1$、$A_2$相同,并且总收益$U_i(a_1,a_2,a_3,a_4)$等于第一阶段结果$(a_1,a_2)$的收益与第二阶段结果$(a_3,a_4)$的收益简单相加。而且,两阶段囚徒困境满足我们在第2.2.A节所作的假定:对每一个第一阶段的可行结果$(a_1,a_2)$,其余部分在参与者3和4之间进行的博弈都存在惟一的纳什均衡,表示为$(a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$。事实上,两阶段囚徒困境满足比上述假定更为严格的条件:在第2.2.A节中,我们允许其余第二阶段博弈的纳什均衡依赖于第一阶段的结果——从而我们表示为$(a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$,而不是简单的$(a_3^*,a_4^*)$(例如在关税博弈中,第二阶段企业选择的均衡产量决定于政府在第一阶段所选择的关税),但在两阶段囚徒困境中,第二阶段博弈惟一的纳什均衡就是$(L_1,L_2)$,不管第一阶段的结果如何。

| | | 参与者2 | |
|---|---|---|---|
| | | $L_2$ | $R_2$ |
| 参与者1 | $L_1$ | 1,1 | 5,0 |
| | $R_2$ | 0,5 | 4,4 |

图2.3.1

| | | 参与者2 | |
|---|---|---|---|
| | | $L_2$ | $R_2$ |
| 参与者1 | $L_1$ | 2,2 | 6,1 |
| | $R_1$ | 1,6 | 5,5 |

图2.3.2

根据在第2.2.A节讲过的求解此类博弈子博弈精炼解的程序，第二阶段博弈的结果为该阶段所余部分博弈的纳什均衡，在本例中，即为$(L_1, L_2)$，两人收益为(1,1)，我们在此前提下分析两阶段囚徒困境第一阶段的情况。由此，两阶段囚徒困境中，参与者在第一阶段的局势就可归纳为图2.3.2所示的一次性博弈，其中，第二阶段的均衡收益(1,1)分别被加到两人第一阶段每一收益组合之上。图2.3.2所示的博弈同样有惟一的纳什均衡：$(L_1, L_2)$。从而，两阶段囚徒困境惟一的子博弈精炼解就是第一阶段的$(L_1, L_2)$和随后第二阶段的$(L_1, L_2)$。在子博弈精炼解中，任一阶段都不能达成相互合作——$(R_1, R_2)$的结果。

这一结论在更为一般的条件下同样成立（这里我们暂时离开两阶段的例子，允许任何有限的$T$次重复）。令$G=\{A_1,\cdots,A_n;u_1,\cdots,u_n\}$表示一个完全信息博弈，其中参与者1到$n$同时从各自的行动空间$A_1$到$A_n$中分别选择行动$a_1$到$a_n$，得到的收益分别为$u_1(a_1,\cdots,a_n),\cdots,u_n(a_1,\cdots,a_n)$，此后我们称博弈$G$为重复博弈中的阶段博弈。

**定义** 对给定的阶段博弈$G$，令$G(T)$表示$G$重复进行$T$次的有限重复博弈，并且在下一次博弈开始前，所有以前博弈的进行都可被观测到。$G(T)$的收益为$T$次阶段博弈收益的简单相加。

**定理** 如果阶段博弈$G$有惟一的纳什均衡，则对任意有限的$T$，重复博弈$G(T)$有惟一的子博弈精炼解：即$G$的纳什均衡结果在每一阶段重复进行。[1]

---

[1] 在阶段博弈$G$为完全信息动态博弈时类似结论同样成立。设$G$属于第2.1.A节所定义的完全且完美信息动态博弈，如果$G$有惟一的逆向归纳解，则$G(T)$有惟一的子博弈精炼解：其中每一阶段的结果都是$G$的逆向归纳解。类似地，设$G$为第2.2.A节定义的两阶段博弈，如果$G$有惟一的子博弈精炼解，则$G(T)$也有惟一的子博弈精炼解：$G$的子博弈精炼解重复进行$T$次。

| | $L_2$ | $M_2$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|
| $L_1$ | 1,1 | 5,0 | 0,0 |
| $M_1$ | 0,5 | 4,4 | 0,0 |
| $R_1$ | 0,0 | 0,0 | 3,3 |

图 2.3.3

现在，我们回到两阶段博弈，进一步考虑阶段博弈 $G$ 有多个纳什均衡的情况，如图 2.3.3 所示。战略 $L_i$ 和 $M_i$ 与图 2.3.1 所示的囚徒困境完全相同，只不过增加了战略 $R_i$ 使博弈有了两个纯战略纳什均衡：其一是囚徒困境中的$(L_1, L_2)$，另外还有$(R_1, R_2)$。这个例子中凭空给囚徒的困境增加了一个均衡解当然是很主观的，但在此博弈中我们的兴趣主要在理论上，而非其经济学意义。在下一节我们将看到，即使重复进行的阶段博弈像囚徒的困境一样有惟一的纳什均衡，但当重复博弈无限次进行下去时，仍表现出这里所分析的多均衡特征。从而，本节我们在最简单的两阶段情况下分析一个抽象的阶段博弈，以后再分析由有经济学意义的阶段博弈构成的无限重复博弈也就十分容易了。

设图 2.3.3 表示的阶段博弈重复进行两次，并在第二阶段开始前可以观测到第一阶段的结果，我们可以证明在这一重复博弈中存在一个子博弈精炼解，其中第一阶段的战略组合为$(M_1, M_2)$ [①]。和第 2.2.A 节相同，假定在第一阶段参与者预测第二阶段的结果将会是下一阶段博弈的一个纳什均衡，由于这里阶段博弈有不止一个纳什均衡，因而参与者可能会预测根据第一阶段的不同结果，在第二阶段的博弈中将会出现不同的纳什均衡。例如，设参与者预测如果第一阶段的结果是$(M_1, M_2)$，第二阶段的结果将会是$(R_1, R_2)$，而如果第一阶段中其他 8 个结果的任何一个出现，第二阶段的结果就将会是$(L_1, L_2)$，那么参与者在第一阶段所面临的局势就可归为图 2.3.4 所示的一次性博弈，其中在$(M_1, M_2)$单元加上了(3,3)，在其余 8 个单元各加上(1,1)。

---

① 严格地讲，我们只针对第 2.2.A 节定义的博弈类型定义了子博弈精炼解，两阶段囚徒困境属于这一类型，因为对每一个第一阶段博弈的可行结果，其余第二阶段博弈都有惟一的纳什均衡。而基于图 2.3.3 为阶段博弈的两阶段重复博弈不属于这一类型，因为其阶段博弈有多个纳什均衡。这里，我们不对子博弈精炼解的定义进行专门扩展，使之适用于所有两阶段博弈，其一因为定义所需的变动极微；其二，在第 2.3.B 节和第 2.4.B 节中将会用到更为一般的定义。

| | $L_2$ | $M_2$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|
| $L_1$ | 2,2 | 6,1 | 1,1 |
| $M_1$ | 1,6 | 7,7 | 1,1 |
| $R_1$ | 1,1 | 1,1 | 4,4 |

图 2.3.4

在图 2.3.4 的博弈中有 3 个纯战略纳什均衡：$(L_1, L_2)$，$(M_1, M_2)$和$(R_1, R_2)$。和在图 2.3.2 中一样，这个一次性博弈中的纳什均衡对应着重复博弈的子博弈精炼解。令$(w, x)$，$(y, z)$表示重复博弈的一个结果——第一阶段和第二阶段的行动分别为$(w, x)$和$(y, z)$。图 2.3.4 中的纳什均衡$(L_1, L_2)$对应着重复博弈的子博弈精炼解$((L_1, L_2), (L_1, L_2))$，因为除第一阶段的结果是$(M_1, M_2)$外，其他任何情况发生时，第二阶段的结果都将是$(L_1, L_2)$。类似地，图 2.3.4 中的纳什均衡$(R_1, R_2)$对应了重复博弈的子博弈精炼解$((R_1, R_2), (L_1, L_2))$。重复博弈的这两个子博弈精炼解都简单地由两个阶段博弈的纳什均衡解相串而成，但图 2.3.4 里的第三个纳什均衡结果却与前两者存在质的差别：图 2.3.4 中的$(M_1, M_2)$对应的重复博弈子博弈精炼解为$((M_1, M_2), (R_1, R_2))$，因为对$(M_1, M_2)$之后的第二阶段结果预期是$(R_1, R_2)$，亦即正如我们前面讲过的，在重复博弈的子博弈精炼解中，合作可以在第一阶段达成。下面是更为一般的情况：如果 $G = \{A_1, \cdots, A_n; u_1, \cdots, u_n\}$是一个有多个纳什均衡的完全信息静态博弈，则重复博弈 $G(T)$可以存在子博弈精炼解，其中对每一 $t < T$，$t$ 阶段的结果都不是 $G$ 的纳什均衡，下一节我们在讨论无限重复博弈时还将涉及这一理念。

这个例子要说明的主要观点是，对将来行动所作的可信的威胁或承诺可以影响到当前的行动。不过另外一点，也说明了子博弈精炼的概念对可信性的要求并不严格。例如，在推导子博弈精炼解$((M_1, M_2), (R_1, R_2))$时，我们假定如果第一阶段的结果是$(M_1, M_2)$，则参与双方都预期$(R_1, R_2)$将是第二阶段的解，如果第一阶段出现了任何其他 8 种结果之一，第二阶段的结果就会是$(L_1, L_2)$。但是，由于第二阶段的博弈中，$(R_1, R_2)$亦为可选择的纳什均衡，而相应的收益为(3,3)，这时选择收益为(1,1)的$(L_1, L_2)$看起来就比较愚蠢了。不严格地看，参与双方进行重新谈判似乎是很自然的事[①]。如果第一阶段的结果并不是

① 之所以说不严格，因为"重新谈判"意味着在第一阶段和第二阶段中间发生了交流(甚至是讨价还价)。如果此类行为是允许的，则它们应包含在对博弈的定义及分析之中。这里我们假定没有此类行为发生，因而"重新谈判"在此可理解为在内心对局势的分析。

$(M_1, M_2)$，从而双方第二阶段的行动应该是$(L_1, L_2)$，那么每一个参与者可能会理性地认为过去的反正已经过去了，在余下的阶段博弈中就会选择双方都偏好的均衡行动$(R_1, R_2)$。但是如果对每个第一阶段的结果，第二阶段的结果都将是$(R_1, R_2)$的话，则第一阶段选择$(M_1, M_2)$的动机就被破坏了：两个参与者在第一阶段面临的局势就可以简化表示为图2.3.3所示阶段博弈的每一单元格中的收益都加上(3, 3)后形成的一次性博弈，于是 $i$ 对 $M_j$ 的最优反应就成为 $L_i$。

为说明这一重新谈判问题的解决思路，我们考虑图2.3.5所示的博弈。和图2.3.3的博弈相比，它的人为设计的痕迹更为明显。同样，我们对这一博弈的分析只为了说明问题，而不考虑其经济学含义，从这一人为博弈中我们得出的有关重新谈判的观点，亦可应用于对无限重复博弈中重新谈判的分析；参见法雷尔罗和马斯金(1989)提供的例子。

| | $L_2$ | $M_2$ | $R_2$ | $P_2$ | $Q_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $L_1$ | 1, 1 | 5, 0 | 0, 0 | 0, 0 | 0, 0 |
| $M_1$ | 0, 5 | 4, 4 | 0, 0 | 0, 0 | 0, 0 |
| $R_1$ | 0, 0 | 0, 0 | 3, 3 | 0, 0 | 0, 0 |
| $P_1$ | 0, 0 | 0, 0 | 0, 0 | 4, 1/2 | 0, 0 |
| $Q_1$ | 0, 0 | 0, 0 | 0, 0 | 0, 0 | 1/2, 4 |

图2.3.5

这里的阶段博弈在图2.3.3的基础上又加上了战略 $p_i$ 和 $Q_i$，从而阶段博弈有了四个纯战略纳什均衡：$(L_1, L_2)$和$(R_1, R_2)$，同时又增加了$(P_1, P_2)$和$(Q_1, Q_2)$。与上例相同，和$(L_1, L_2)$相比，参与双方都更倾向于选择$(R_1, R_2)$。但更重要的，图2.3.5的博弈中，不存在一个纳什均衡$(x, y)$，使参与双方和$(P_1, P_2)$或$(Q_1, Q_2)$或$(R_1, R_2)$相比，都更倾向于选择$(x, y)$。我们称$(R_1, R_2)$帕累托优于(Pareto-dominates)$(L_1, L_2)$，而且$(P_1, P_2)$、$(Q_1, Q_2)$和$(R_1, R_2)$都处于图2.3.5所示博弈的纳什均衡收益的帕累托边界(Pareto frontier)之上。

设想图2.3.5的阶段博弈重复进行两次，且在第二阶段开始前可以观测到第一阶段的结果。进一步假设参与者预期的第二阶段结果如下：如果第一阶段的结果为$(M_1, M_2)$，第二阶段将是$(R_1, R_2)$；第一阶段$(M_1, w)$，其中 $w$ 为除 $M_2$ 之外的任意战略，则$(P_1, P_2)$；第一阶段$(x, M_2)$，其中 $x$

为除 $M_1$ 之外的任意战略，则 $(Q_1, Q_2)$；第一阶段 $(y, z)$，其中 $y$ 为除 $M_1$ 之外的任何战略，$z$ 为除 $M_2$ 之外的任何战略，则 $(R_1, R_2)$。那么 $(M_1, M_2)$，$(R_1, R_2)$ 就是重复博弈的子博弈精炼解，因为先选 $M_i$，接着选 $R_i$，每个参与者都可得到 $4+3$ 的收益，但在第一阶段偏离这一选择而选 $L_i$，却只能得到 $5+1/2$（选择其他行动的收益甚至更低）。更为重要的是，前一例子中遇到的困难在这里并没有出现。在基于图 2.3.3 的两阶段重复博弈中，对一个参与者在第一阶段不守信用的惩罚，只能是在第二阶段的帕累托居劣均衡，从而同时惩罚了惩罚者。在这里与之不同的是，有三个均衡处于帕累托边界之上——其中之一可以奖励参与双方在第一阶段的良好行动，另外两个则可以在惩罚第一阶段不守信用者的同时，奖励惩罚者。从而，一旦在第二阶段有必要实施惩罚，惩罚者就不会再考虑选择阶段博弈的其他均衡，于是也就无法说服惩罚者就第二阶段的行动进行重新谈判。

### 2.3.B 理论：无限重复博弈

本节我们回到对无限重复博弈的讨论。和前面有限重复博弈的例子相同，问题的中心是关于将来行动的可信的威胁或承诺可以影响到当前的行动。在有限情况的例子中我们已看到，如果阶段博弈 $G$ 有多个纳什均衡，重复博弈 $G(T)$ 就可能会存在子博弈精炼解，其中对任意 $t<T$，阶段 $t$ 的结果都不是 $G$ 的纳什均衡。在无限重复博弈中一个更强的结论成立：即使阶段博弈有惟一的纳什均衡，无限重复博弈中也可以存在子博弈精炼解，其中没有一个阶段的结果是 $G$ 的纳什均衡。

首先，我们研究无限重复的囚徒困境博弈，接着再讨论和前一节定义的有限重复博弈类型相同的无限重复博弈：一个完全信息静态博弈 $G$，被无限次重复进行，并且在下一阶段开始时，之前所有阶段的结果都可以被观测到。对这一类型的有限重复或无限重复博弈，我们定义参与者的战略、子博弈和子博弈精炼纳什均衡（在第 2.4.B 节，我们对一般的完全信息动态博弈定义上述概念，而不仅包含这一特定类型的重复博弈）。此后，我们运用这些概念给出并证明弗里德曼(1971)的定理（亦称为无名氏定理[①]）

① 开始时的无名氏定理分析了一个有限重复博弈的全部纳什均衡的收益。这一结论被称为无名氏定理，是因为尽管无人发表，但在 50 年代就已广为博弈论学者所知。弗里德曼(1971)的定理则分析了有限重复博弈的特定子博弈精炼纳什均衡的收益，由于应用了子博弈精炼纳什均衡，这一较纳什均衡条件更强的均衡概念，因而较当初的无名氏定理条件更强。不过当初的名字依然沿用下来：弗里德曼的定理（和此后的结论）有时称为无名氏定理，尽管在它们公开发表之前并未被博弈论学者所周知。

| | | 参与者 2 | |
|---|---|---|---|
| | | $L_2$ | $R_2$ |
| 参与者 1 | $L_1$ | 1,1 | 5,0 |
| | $R_1$ | 0,5 | 4,4 |

图 2.3.6

设想图 2.3.6 的囚徒困境将无限次地重复进行，并且对每个 $t$，在第 $t$ 阶段开始前的 $t-1$ 次阶段博弈的结果都可被观测到。将这无限次阶段博弈的收益简单相加，对衡量参与者在无限次重复博弈中的总收益并无太大意义，比如每一阶段得到的收益为 4 显然要优于每一阶段得到的收益为 1，但两者之和却都是无穷大。前面讲过（鲁宾斯坦的讨价还价模型，第 2.1.D 节）贴现因子 $\delta=1/(1+r)$ 为一个时期后的一美元今天的价值，其中 $r$ 为每一阶段的利率。给定一个贴现因子及参与者在无限次博弈中每次的收益，我们可以计算收益的现值——如果现在把这笔钱存入银行，在一定期间结束时，银行存款的余额与那时可得到的金额相等。

**定义** 给定贴现因子 $\delta$，无限的收益序列 $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\cdots$ 的现值为

$$\pi_1+\delta\pi_2+\delta^2\pi_3+\cdots=\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\pi_t\ .$$

借助于贴现因子 $\delta$，还可以把我们称之为无限重复的博弈解释为一个有限重复的博弈，但在其结束之前重复进行的次数是随机的，设想在博弈的每一阶段完成后，都要掷一枚（加权的）硬币来决定博弈是否结束。如果博弈立刻结束的概率为 $p$，则博弈将至少再进行一个阶段的概率为 $1-p$，在下一阶段将可以得到的收益（如果能继续进行）$\pi$，在当前阶段的硬币未掷之前的价值只有 $(1-p)\pi/(1+r)$。与之相似，在两个阶段之后可能得到的收益（如果后面两个阶段都能继续进行）$\pi$，在当前阶段的硬币未掷之前的价值只有 $(1-p)^2\pi/(1+r)^2$。令 $\delta=(1-p)/(1+r)$，则现值 $\pi_1+\delta\pi_2+\delta^2\pi_3+\cdots$ 既包含了货币的时间价值，又包含了博弈将要结束的可能性。

下面我们分析无限重复的囚徒困境博弈，其中每一参与者的贴现因子都为 $\delta$，且每一参与者在重复博弈中得到的收益等于各自在所有阶段博弈中得到收益的现值。我们将证明尽管阶段博弈中惟一的纳什均衡是不合作——即 $(L_1,L_2)$——可在无限重复博弈的一个子博弈精炼解中，每一阶段的结果都将是相互合作——即 $(R_1,R_2)$。论证中要运用我们分析基于图

2.3.3的两阶段重复博弈时的思想(在该阶段博弈中我们在囚徒困境的基础上加入了第二个纳什均衡):如果目前参与者相互合作,则下一阶段他们将选择高收益的均衡结果,否则将选择低收益的均衡结果。两阶段重复博弈和无限重复博弈的不同之处在于,这里下一次可选择的高收益均衡,并不是人为加在阶段博弈之上的另一个均衡结果,而是代表着在下一阶段及其后的继续合作。

假设参与者 $i$ 在无限重复博弈的开始选择相互合作的战略,并且当且仅当前面每个阶段参与双方都选择相互合作时,在其后的阶段博弈中也选择相互合作。我们可把参与者 $i$ 的这一战略正式表述为:

在第一阶段选择 $R_i$。且在第 $t$ 阶段,如果所有前面 $t-1$ 阶段的结果都是 $(R_1,R_2)$,则选择 $R_i$,否则选择 $L_i$。

这一战略是触发战略(trigger strategy)的一种,之所以称为触发战略,是因为如果没有人选择不合作,合作将一直进行下去;一旦有人选择不合作,就会触发其后所有阶段都不再相互合作。如果参与双方都采取这种触发战略,则此无限重复博弈的结果就将是每一阶段选择 $(R_1,R_2)$。我们首先论证如果 $\delta$ 距1足够近,则采取这种战略,对参与双方都是无限重复博弈的纳什均衡,其后再证明这一纳什均衡是子博弈精炼的,以使论证更为严格。

为证明采取上述触发战略,对参与双方来讲都是无限重复博弈的纳什均衡,我们将假定参与者 $i$ 已采取触发战略,并证明在 $\delta$ 与1足够接近的条件下,参与者 $j$ 的最优反应为也选择同样的战略。由于一旦某阶段的结果偏离了 $(R_1,R_2)$,参与者 $i$ 将在其后永远选择 $L_i$,那么如果某阶段的结果偏离了 $(R_1,R_2)$,参与者 $j$ 的最优反应同样是在其后永远选择 $L_i$。余下的就是计算参与者 $j$ 在第一阶段的最优反应,以及前面的结果都是 $(R_1,R_2)$ 时,下一阶段的最优反应。选择 $L_i$ 将会使当期得到5的收益,但却会触发参与者 $i$ 的永远不合作战略(从而亦引发参与者 $j$ 本人的不合作),于是未来每一阶段的收益都将成为1。由于 $1+\delta+\delta^2+\cdots=1/(1-\delta)$,上述一系列收益的现值为

$$5+\delta\cdot 1+\delta^2\cdot 1+\cdots=5+\frac{\delta}{1-\delta}.$$

采取另外的战略,选择 $R_j$ 在本期的收益将为4,并且在下一阶段还可得到完全相同的选择机会,令 $V$ 表示参与者 $j$ 在(当前和以后每一次面临同样选择时)无限次的选择中总选择最优战略时收益的现值。如果选择 $R_j$ 是最优的,则

$$V = 4 + \delta \cdot V \quad ,$$

或 $V = 4/(1-\delta)$，因为选择 $R_j$ 时，下一阶段还有机会进行相同选择。如果选择 $L_j$ 是最优的，则

$$V = 5 + \frac{\delta}{1-\delta} \quad ,$$

此结果前面已经导出。于是，当且仅当下式成立，选择 $R_j$ 为最优：

$$\frac{4}{1-\delta} \geqslant 5 + \frac{\delta}{1-\delta} \quad , \tag{2.3.1}$$

即 $\delta \geqslant 1/4$。于是，当且仅当 $\delta \geqslant 1/4$时，在第一阶段，并且在前面结果都是$(R_1, R_2)$的下一阶段，参与者 $j$ 的最优反应（给定参与者 $i$ 已采取了触发战略）为 $R_j$。这一结论，再加上前面已证明的，一旦某一阶段的结果偏离了$(R_1, R_2)$，$j$ 的最优反应就是永远选择 $L_j$，我们已经证明当且仅当 $\delta \geqslant 1/4$ 时，参与双方都采取触发战略是博弈的纳什均衡。

下面我们要论证的是这一纳什均衡同时又是子博弈精炼的。为做到这一点，首先定义重复博弈中的以下三个概念：重复博弈中的战略、重复博弈的子博弈以及重复博弈的子博弈精炼纳什均衡。为借助前一节中的简单例子说明这些概念，我们将对有限重复博弈和无限重复博弈中的情况同时给出定义。在上一节，我们基于阶段博弈 $G = \{A_1, \cdots, A_n; u_1, \cdots, u_n\}$ 定义了有限重复博弈 $G(T)$，其中的 $G$ 是一个完全信息静态博弈，参与者 1 到 $n$ 同时从各自的行动空间 $A_1$ 到 $A_n$ 中分别选择行动 $a_1$ 到 $a_n$，得到收益 $u_1(a_1, \cdots, a_n)$到 $u_n(a_1, \cdots, a_n)$，现在我们定义类似的无限重复博弈。①

**定义** 给定一个阶段博弈 $G$，令 $G(\infty, \delta)$表示相应的无限重复博弈，其中 $G$ 将无限次地重复进行，且参与者的贴现因子都为 $\delta$。对每一个 $t$，之前 $t-1$ 次阶段博弈的结果在 $t$ 阶段开始进行前都可被观测到，每个参与者在 $G(\infty, \delta)$中的收益都是该参与者在无限次的阶段博弈中所得收益的现值。

在所有博弈（无论是重复的还是非重复的）中，参与者的一个战略都是行动的一个完整计划——它包括了该参与者在所有可能的情况下，需要作出选择时的行动。更形象一点讲，如果一个参与者在博弈开始前把一个战

---

① 我们当然也可以基于一个动态阶段博弈定义一个重复博弈，本节我们将讨论限于静态的阶段博弈是为了尽可能简单地说明主要原理。在第 2.3.D 和第 2.3.E 节的应用中就有基于动态阶段博弈的重复博弈。

略留给他的律师,律师就可以代理该参与者参加博弈,在任何情况下都无需再征询参与者的意见。(指客观上不需要,即各种情况下应该怎么办已由参与者的战略安排好了,而不是指律师可以代理决策——译注)例如——在一个完全信息静态博弈中,一个战略就是一个简单的行动(这也是为什么我们在第1章中将这样的博弈表示为 $G=\{S_1,\cdots,S_n;u_1,\cdots,u_n\}$,而在本章又表示为 $G=\{A_1,\cdots,A_n;u_1,u_n\}$:对一个完全信息静态博弈而言,参与者 $i$ 的战略空间 $S_i$ 即简单等于其行动空间 $A_i$)。不过在动态博弈中,一个战略就较为复杂了。

考虑前一节分析的两阶段囚徒困境,每一个参与者都有两次行动,于是也许有人会认为一个战略就是一对指令 $(b,c)$,其中 $b$ 是第一阶段的行动,$c$ 是第二阶段的行动。但第一阶段有四个可能的结果——$(L_1,L_2)$,$(L_1,R_2)$,$(R_1,L_2)$ 及 $(R_1,R_2)$——它们代表了四种不同的情况,每一参与者都可能针对这些情况作出不同的反应。从而,每一参与者的战略就应包含5条指令,表示为 $(v,w,x,y,z)$。这里 $v$ 为第一阶段的行动,$w,x,y$ 及 $z$ 则表示针对第一阶段的不同结果 $(L_1,L_2)$,$(L_1,R_2)$,$(R_1,L_2)$ 及 $(R_1,R_2)$,分别应该在第二阶段采取的行动。使用这一表示,"第一阶段选择 $b$,且不论第一阶段出现什么结果,均在第二阶段选择 $c$"这一指示就可写成 $(b,c,c,c,c)$,但这一表示方法也可以表示第二阶段行动依赖于第一阶段结果的战略,比如 $(b,c,c,c,b)$,它的含义是"第一阶段选择 $b$,如果第一阶段的结果是 $(R_1,R_2)$,则在第二阶段选择 $b$,否则第二阶段选择 $c$"。类似地,在基于图2.3.3的两阶段重复博弈中,每一参与者的战略都包含10条指令——一个第一阶段的行动和9个不同情况下的第二阶段的行动,针对第一阶段每一个可能的结果都有相应的行动。请回顾在对此两阶段重复博弈进行分析时,我们曾考虑过的一个战略,其中参与者第二阶段的行动是依第一阶段结果而确定的:第一阶段选择 $M_i$,如果第一阶段的结果是 $(M_1,M_2)$,则在第二阶段选择 $R_i$,如不是,则选择 $L_i$。

在有限重复博弈 $G(T)$ 或无限重复博弈 $G(\infty,\delta)$ 中,博弈到阶段 $t$ 的进行过程(history of play through stage $t$)指各方参与者从阶段1到阶段 $t$ 所有行动的记录。例如,参与者可能在第一阶段选择 $(a_{11},\cdots,a_{n1})$,在第二阶段选择 $(a_{12},\cdots,a_{n2})\cdots$,在第 $t$ 阶段选择 $(a_{1t},\cdots,a_{nt})$,其中对每一参与者 $i$,在阶段 $s$ 的行动 $a_{is}$ 属于行动集 $A_i$。

**定义** 在有限重复博弈 $G(T)$ 或无限重复博弈 $G(\infty,\delta)$ 中,参与者的一个战略特指在每一阶段,针对其前面阶段所有可能的进行过程,参与者将

会选择的行动。

下面我们讨论子博弈。一个子博弈是全部博弈的一部分,当全部博弈进行到任何一个阶段,到此为止的进行过程已成为参与各方的共同知识,而其后尚未开始进行的部分就是一个子博弈(在本节后面的部分我们将给出重复博弈 $G(T)$ 和 $G(\infty,\delta)$ 的子博弈的精确定义,在第 2.4.B 节还将针对一般的完全信息动态博弈给出子博弈的精确概念)。例如在两阶段囚徒困境中,就有 4 个子博弈,分别为第一阶段 4 种可能的结果出现后,第二阶段的博弈。类似地,在基于图 2.3.3 的两阶段博弈中,存在 9 个子博弈,因为在第二阶段开始前,第一阶段的博弈可能会出现 9 个不同的结果,而每种结果出现后,第二阶段的博弈都是一个不同的子博弈。在有限重复博弈 $G(T)$ 和无限重复博弈中 $G(\infty,\delta)$ 中,战略的定义和子博弈的定义关系非常密切:参与者的一个战略指该参与者在博弈的第一阶段选择的行动以及在其所有子博弈的第一阶段将要选择的行动。

**定义** 在有限重复博弈 $G(T)$ 中,由第 $t+1$ 阶段开始的一个子博弈为 $G$ 进行 $T-t$ 次的重复博弈,可表示为 $G(T-t)$。由第 $t+1$ 阶段开始有许多子博弈,到 $t$ 阶段为止的每一可能的进行过程之后都是不同的子博弈。在无限重复博弈 $G(\infty,\delta)$ 中,由 $t+1$ 阶段开始的每个子博弈都等同于初始博弈 $G(\infty,\delta)$,和在有限情况下相似,博弈 $G(\infty,\delta)$ 到 $t$ 阶段为止有多少不同的可能进行过程,就有多少从 $t+1$ 阶段开始的子博弈。

有一点务请注意,重复博弈的第 $t$ 阶段本身(在有限情况下假定 $t<T$)并不是整个博弈的一个子博弈。子博弈是原博弈的一部分,不只是说博弈到此为止的进行过程已成为全体参与者的共同知识,还包括了原博弈在这一点之后的所有进行。只单独分析第 $t$ 阶段的博弈就等于把第 $t$ 阶段看成原重复博弈的最后一个阶段,这样的分析也可能会得到一些结论,但却完全无助于对整个重复博弈的分析。

现在我们可以给出子博弈精炼纳什均衡的定义了,它仍建立在纳什均衡的概念之上。后者和第 1 章中的定义并无二致,但这里包含了在动态博弈中参与者战略的潜在复杂性:在所有博弈中,纳什均衡是所有参与者的一个战略组合,每个参与者都有一个战略,并且每一参与者的战略都是针对其他参与者战略的最优反应。

**定义(塞尔滕(Selten, 1965))** 如果参与者的战略在每一子博弈中都构成纳什均衡,我们则说纳什均衡是子博弈精炼的。

子博弈精炼纳什均衡把纳什均衡的概念进一步严格化,即一个子博弈精炼均衡首先必须是纳什均衡,然后还须通过其他检验。

为证明无限重复囚徒困境中的触发战略纳什均衡是子博弈精炼的,我们必须证明触发战略在此无限重复博弈中的每一子博弈中都构成了纳什均衡。我们已提到,无限重复博弈的每一子博弈都等同于原博弈。在无限重复囚徒困境的触发战略纳什均衡中,这些子博弈可分为两类:(i)所有以前阶段的结果都是$(R_1, R_2)$的子博弈,和(ii)至少有一个前面阶段的结果不是$(R_1, R_2)$的子博弈。如果参与者在整个博弈中采取触发战略,则(i)参与者在第一类子博弈中的战略同样是触发战略,我们已证明它是整个博弈的一个纳什均衡;(ii)参与者在第二类子博弈中的战略只是永远单纯重复阶段博弈的均衡$(L_1, L_2)$,它同样是整体博弈的纳什均衡。从而可以证明,无限重复囚徒困境中的触发战略纳什均衡是子博弈精炼的。

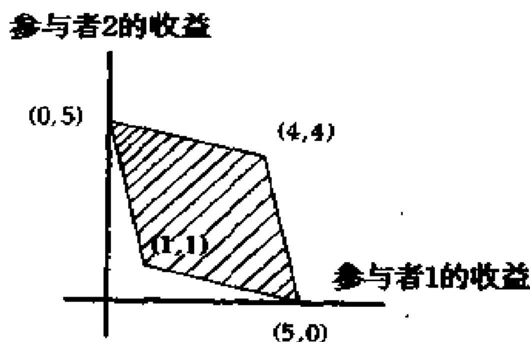



图2.3.7

下面我们将相似的论证用于无限重复博弈 $G(\infty, \delta)$。这些论证将导出弗里德曼(1971)的无限重复博弈定理。为表述这一定理,我们还需最后定义两个概念。第一,我们称一组收益$(x_1, \cdots, x_n)$为阶段博弈 $G$ 的可行收益(feasible),如果它们是 $G$ 的纯战略收益的凸组合(convex combination)(即纯战略收益的加权平均,权重非负且和为1),图2.3.6所示囚徒困境的可行收益集合为图2.3.7中的阴影区域。纯战略(1,1),(0,5),(4,4)和(5,0)都是可行的,其他可行收益包括$1<x<4$的所有$(x, x)$,它们由(1,1)与(4,4)的加权平均得出,以及满足$y+z=5$且$0<y<5$的所有$(y, z)$,它们由(0,5)与(5,0)加权平均得出。图2.3.7阴影区域之内的其他组合是由两

个以上的纯战略收益加权平均得出的。为达到纯战略收益的加权平均收益，参与者可以使用一个共同的随机数发生器：例如，根据掷一枚（均匀）硬币的结果选择$(L_1, R_2)$或$(R_1, L_2)$，他们可以得到的期望收益为(2.5, 2.5)。

为表述弗里德曼定理，我们需要的第二个概念用以重新衡量参与者的收益。我们仍将每一参与者在无限重复博弈$G(\infty, \delta)$的收益定义为该参与者在无限个阶段博弈中收益的现值，但我们用同样无限个收益值的平均收益(average payoff)来表示这一现值却更为方便，平均收益指为得到相等的收益现值而在每一阶段都应该得到的等额收益值。令贴现因子为$\delta$，设无限的收益序列$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \cdots$的现值为$V$，如果每一阶段都能得到的收益为$\pi$，则现值为$\pi/(1-\delta)$。在贴现因子为时$\delta$，为使$\pi$等于无限序列$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \cdots$的平均收益，这两个现值必须相等，于是$\pi = V(1-\delta)$，也就是说，平均收益为现值的$(1-\delta)$倍。

**定义**　给定贴现因子$\delta$，无限的收益序列$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \cdots$的平均收益为

$$(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}t_t .$$

和现值相比，使用平均收益的优点在于后者能够和阶段博弈的收益直接比较。例如，在图2.3.6的囚徒困境中，两参与者在每一阶段都可得到4的收益，这样一个无限的收益序列的平均收益为4，但现值为$4(1-\delta)$。不过，由于平均收益只是现值的另一种衡量，使平均收益最大化即等同于使现值最大化。

现在，我们终于可以给出对无限重复博弈进行讨论的主要结果了：

**定理（弗里德曼，1971）**　令$G$为一个有限的完全信息静态博弈，令$(e_1, \cdots, e_n)$表示$G$的一个纳什均衡下的收益，且$(x_1, \cdots, x_n)$表示$G$的其他任何可行收益。如果对每一个参与者$i$有$x_i > e_i$，且如果$\delta$足够接近于1，则无限重复博弈$G(\infty, \delta)$存在一个子博弈精炼纳什均衡，其平均收益可达到$(x_1, \cdots, x_n)$。

这一定理的证明与我们已给出的在无限重复囚徒困境中的论证思路完全一致，我们将其放在附录2.3.B。把这一定理的结果扩展到一般的既非有限，亦非静态的阶段博弈，从概念上讲毫无障碍，但用符号表示却显得有些杂

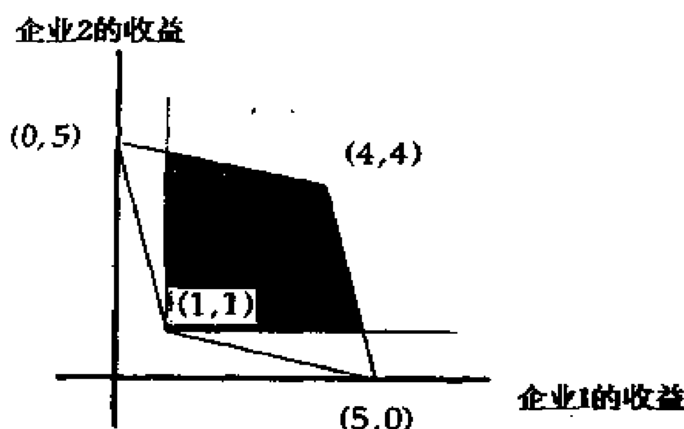



图2.3.8

乱，具体例子可参见后面3个小节中的应用。在图2.3.6的囚徒困境中，弗里德曼定理保证了图2.3.8十字线右上方的阴影部分都可以成为重复博弈的一个子博弈精炼纳什均衡下的平均收益，其前提是贴现因子距1足够接近。

在本节最后，我们简单介绍无限重复博弈理论的两个进一步发展，这两方面都由于囚徒困境的特殊性而被掩盖了。在图2.3.6的（一次性）囚徒困境中，参与者 $i$ 通过选择 $L_i$，可保证至少得到纳什均衡收益1，但是在一次性的古诺双头博弈（像第1.2.A节中描述的那样）中，一个企业通过生产纳什均衡产出，并不能保证得到纳什均衡下的利润；而一个企业所能保证得到的惟一的利润为0，这时它可以完全停工。给定一个任意的阶段博弈 $G$，令 $r_i$ 表示参与者 $i$ 的保留收益（reservation payoff）——无论其他参与者如何行动，参与者 $i$ 能够保证的最大收益。则一定会有 $r_i \leqslant e_i$（这里 $e_i$ 为弗里德曼定理中使用的纳什均衡下的收益），因为如果 $r_i$ 大于 $e_i$，则参与者再选择其纳什均衡战略就不是他的最优反应。在囚徒困境中，$r_i = e_i$，但在古诺双头博弈（此类居多）中，$r_i < e_i$。

富登伯格和马斯金（1986）证明对两个参与者的博弈，弗里德曼定理中的均衡收益 $(e_1, e_2)$ 换为保留收益 $(r_1, r_2)$，结论同样成立。即如果 $(x_1, x_2)$ 为 $G$ 的一个可行收益，且对每个 $i$ 都有 $x_i > r_i$，则对足够接近于1的 $\delta$，$G(\infty, \delta)$ 存在一个子博弈精炼纳什均衡，其平均收益等于 $(x_1, x_2)$，即使对某个或双方参与者来说，$x_i < e_i$。对参与者为两方以上的博弈，富登伯格和马斯金给出了一个较宽松的条件，使得定理中的均衡收益 $(e_1, \cdots, e_n)$ 可以替换为保留收益 $(r_1, \cdots, r_n)$。

一个互补性的问题同样有趣:在贴现因子并不"足够接近于 1"时,子博弈精炼纳什均衡能达到什么样的平均收益? 处理这一问题的思路之一是令 $\delta$ 等于一个固定值,并在假设参与者运用触发战略,一旦发生任何偏离就永远转到阶段博弈的纳什均衡的条件下,计算可以达到的平均收益。在决定当前阶段是否偏离时,$\delta$ 越小,下一阶段开始进行惩罚的效果就越小。然而,一般来讲参与者总可以比简单重复阶段博弈的纳什均衡得到更高的收益。第二种方法,由阿布勒(Abreu, 1988)最先提出,它基于如下思路,即阻止一个参与者偏离既定战略的最有效的方法是威胁该参与者,一旦偏离,就将受到最严厉的可信的惩罚(即威胁该参与者,一旦偏离,就将选择使偏离者收益最低的无限重复博弈的子博弈精炼纳什均衡)。在绝大多数博弈中,永远转到阶段博弈的纳什均衡并不是最严厉的可信惩罚,于是有些使用触发战略方法无法达到的平均收益,运用阿布勒的方法可以达到。不过,在囚徒困境中,阶段博弈的纳什均衡恰好得到保留收益(即 $e_i = r_i$),则这两种方法是等价的。下一节将对这两种方法分别给出相应的例子。

## 附录 2.3.B

本附录证明弗里德曼的定理。令$(a_{e1}, \cdots, a_{en})$为 $G$ 的纳什均衡,均衡收益为$(e_1, \cdots, e_n)$。类似地,令$(a_{x1}, \cdots, a_{xn})$为带来可行收益$(x_1, \cdots, x_n)$的行动组合。(后面的符号只是象征性的,因为它忽略了要达到任意可行收益一般都需要借助于公用的随机数发生器)考虑以下参与者 $i$ 的触发战略:

在第一阶段选择 $a_{xi}$。在第 $t$ 阶段,如果所有前面 $t-1$ 个阶段的结果都是$(a_{x1}, \cdots, a_{xn})$,则选择 $a_{xi}$;否则选择 $a_{ei}$。

如果参与双方都采用这种触发战略,则无限重复博弈的每一阶段的结果都将是$(a_{x1}, \cdots, a_{xn})$,从而(期望的)收益为$(x_1, \cdots, x_n)$。首先,我们论证如果 $\delta$ 足够接近于 1,则参与者的这种战略是重复博弈的纳什均衡,其后再证明这样一个纳什均衡是子博弈精炼的。

设想除参与者 $i$ 之外的所有参与者都采用了这一触发战略。由于一旦某一阶段的结果不是$(a_{x1}, \cdots, a_{xn})$,其他参与者将永远选择$(a_{e1}, \cdots, a_{e,i-1}$ $a_{e,i+1}, \cdots, a_{en})$,参与者 $i$ 的最优反应为一旦某一阶段的结果偏离了$(a_{x1}, \cdots, a_{xn})$,就永远选择 $a_{ei}$。其余就是要确定参与者 $i$ 在第一阶段的最优反应,以及之前所有阶段的结果都是$(a_{x1}, \cdots, a_{xn})$时的最优反应。令 $a_{di}$ 为参与者 $i$ 对$(a_{x1}, \cdots, a_{xn})$的最优偏离,即 $a_{di}$ 为下式的解

$$\max_{a_i \in A_i} u_i(a_{x1}, \cdots, a_{x,i-1}, a_i, a_{x,i+1}, \cdots, a_{xn}) .$$

令 $d_i$ 为 $i$ 从此偏离中得到的收益：$d_i = u_i(a_{x1}, \cdots, a_{x,i-1}, a_{di}, a_{x,i+1}, \cdots, a_{xn})$（再一次我们忽略了随机数发生器的作用：最优偏离及其收益可以依赖于随机数发生器产生的纯战略）。我们有 $d_i \geqslant x_i = u_i(a_{x1}, \cdots, a_{x,i-1}, a_{xi}, a_{x,i+1}, \cdots, a_{xn}) > e_i = u_i(a_{e1}, \cdots, a_{en})$。

选择 $a_{di}$ 将会使当前阶段的收益为 $d_i$，但却将触发其他参与人永远选择 $(a_{e1}, \cdots, a_{e,i-1}, a_{e,i+1}, \cdots, a_{en})$，对比参与者 $i$ 的最优选择为 $a_{ei}$，于是未来每一阶段的收益都将是 $e_i$。这一收益序列的现值为

$$d_i + \delta \cdot e_i + \delta^2 \cdot e_i + \cdots = d_i + \frac{\delta}{1-\delta} e_i \ .$$

（由于任何偏离都将触发其他参与者的相同反应，我们只需考虑能带来最大收益的偏离就足够了）。另一方面，选择 $a_{xi}$ 将在本阶段得到收益 $x_i$，并且在下一阶段可在 $a_{di}$ 和 $a_{xi}$ 之间进行完全相同的选择。令 $V_i$ 表示参与者 $i$ 就此作出最优选择时各阶段博弈收益的现值（目前及其后每一次面临这样选择时）。如果选择 $a_{xi}$ 是最优的，则

$$V_i = x_i + \delta V_i \quad \text{或} \quad V_i = x_i/(1-\delta) \ .$$

如果选择 $a_{di}$ 是最优的，则

$$V_i = d_i + \frac{\delta}{1-\delta} e_i \quad ,$$

此式前面已经导出（假定随机数发生器序列不相关（serially uncorrelated），则令 $d_i$ 为参与者 $i$ 偏离随机数发生器确定的不同纯战略可能得到的最高收益就足够了）。那么，当且仅当下式成立选择 $a_{xi}$ 是最优的

$$\frac{x_i}{1-\delta} \geqslant d_i + \frac{\delta}{1+\delta} e_i \quad \text{或} \quad \delta \geqslant \frac{d_i - x_i}{d_i - e_i} \ .$$

从而，在第一阶段，并且在之前的结果都是 $(a_{x1}, \cdots, a_{xn})$ 的任何阶段，当且仅当 $\delta \geqslant (d_i - x_i)/(d_i - e_i)$ 时，参与者 $i$ 的最优行动（给定其他参与者已采用了触发战略）是 $a_{xi}$。

给定这一结果以及一旦某一阶段的结果偏离了 $(a_{xi}, \cdots, a_{xn})$，则 $i$ 的最优反应是永远选择 $a_{ei}$，我们得到当且仅当下式成立时，所有参与者采用开始时描述的触发战略是纳什均衡

$$\delta \geqslant \max_i \frac{d_i - x_i}{d_i - e_i} \ .$$

由于 $d_i \geqslant x_i > e_i$，对每一个 $i$ 都一定有 $(d_i - x_i)/(d_i - e_i) < 1$，那么对所有参与者上式的最大值也一定严格小于 1。

余下的就是证明这一纳什均衡是子博弈精炼的，即触发战略必须在 $G$

$(\infty,\delta)$的每一个子博弈中构成纳什均衡。我们已讲过，$G(\infty,\delta)$的每一个子博弈都等同于 $G(\infty,\delta)$本身。在触发战略纳什均衡中，这些子博弈可分为两类：(i)所有前面阶段的结果都是$(a_{x1},\cdots,a_{xn})$时的子博弈；和(ii)前面至少有一个阶段的结果偏离了$(a_{x1},\cdots,a_{xn})$时的子博弈。如果参与者在整个博弈中采用了触发战略，则(i)参与者在第一类子博弈中的战略同样也是触发战略，而我们刚刚证明它是整个博弈的纳什均衡；(ii)参与者在第二类子博弈中的战略永远是简单重复阶段博弈均衡$(a_{e1},\cdots,a_{en})$，它也是整个博弈的一个纳什均衡。从而，我们证明了无限重复博弈的触发战略纳什均衡是子博弈精炼的。

### 2.3.C 古诺双头垄断下的共谋

弗里德曼(1971)首先证明了在无限重复博弈中，采取触发战略，只要发生任何背离，就在以后阶段永远转到阶段博弈的纳什均衡，由此可以达成在整个博弈中的合作。最初使用的例子是古诺双头垄断时的共谋，介绍如下。

首先回顾第1.2.A节讲过的静态古诺博弈：如果市场中的总产量为 $Q=q_1+q_2$，则市场出清价格为 $P(Q)=a-Q$，假定 $Q<a$。每一企业的边际成本为 $c$，且无固定成本，两企业同时选择产量。在唯一的纳什均衡条件下，每一企业的产量为$(a-c)/3$，我们称之为古诺产量并用 $q_c$ 表示。由于均衡条件下的总产量 $2(a-c)/3$ 大于垄断产量 $q_m=(a-c)/2$，如果两企业分别生产垄断产出的一半，即 $q_i=q_m/2$ 时，每一企业的福利都将较均衡情况下提高。

考虑以上述古诺博弈为阶段博弈的无限重复博弈，两企业的贴现因子均为 $\delta$。下面我们计算两个企业的下述触发战略成为无限重复博弈的纳什均衡时，贴现因子 $\delta$ 的值：

> 在第一阶段生产垄断产量的一半，$q_m/2$。第 $t$ 阶段，如果前面 $t-1$ 个阶段两个企业的产量都为 $q_m/2$，则生产 $q_m/2$；否则，生产古诺产量 $q_c$。

由于在前一节的囚徒困境中已进行过相似的证明，这里我们只给出论证过程的要点。

当双方都生产 $q_m/2$ 时，每个企业的利润为$(a-c)^2/8$，我们用 $\pi_m/2$ 来表示。当双方都生产 $q_c$ 时，每个企业的利润为$(a-c)^2/9$，我们 $\pi_c$ 用表示。最后，如果企业 $i$ 将在本期生产 $q_m/2$，则使企业 $j$ 本期利润最大化的产量是下式的解

$$\max_{q_j}(a - q_j - \frac{1}{2}q_m - c)q_j .$$

它的解为 $q_j = 3(a - c)/8$，相应的利润水平为 $9(a - c)^2/64$，我们用 $\pi_d$ 表示（$d$ 表示偏离）。那么，要使两企业采取上述触发战略成为纳什均衡，必须满足

$$\frac{1}{1-\delta}\cdot\frac{1}{2}\pi_m \geqslant \pi_d + \frac{\delta}{1-\delta}\cdot\pi_c \qquad (2.3.2)$$

此式和分析囚徒困境时的(2.3.1)式是相似的。将 $\pi_m$、$\pi_c$、$\pi_d$ 的值带入(2.3.2)可得 $\delta \geqslant 9/17$。由于与前一节相同的原因，这一纳什均衡又是子博弈精炼的。

我们可以进一步追问如果 $\delta \geqslant 9/17$，企业的行为将如何。我们将试着运用上一节讲过的两种方法。首先来计算对任意一个给定的 $\delta$ 值，如果双方都采用触发战略，一旦出现背离就永远转到古诺产出，企业可以达到的利润最大化的产量。我们已经知道，这样的触发战略不能支持低到垄断产出一半的产量，但对任意 $\delta$ 的值，永远简单重复古诺产量却都是一个子博弈精炼纳什均衡。从而，触发战略可以支持的利润最大化产量处于 $q_m/2$ 和 $q_c$ 之间。为计算这一产量，考虑如下的触发战略：

> 第一阶段生产 $q^*$。在第 $t$ 阶段，如果在此之前的 $t-1$ 个阶段两企业的产量都是 $q^*$，生产 $q^*$；否则，生产古诺产出 $q_c$。

如果双方都生产 $q^*$，每个企业的利润为 $(a - 2q^* - c)q^*$，我们用 $\pi^*$ 表示。如果企业 $i$ 计划在当期生产 $q^*$，则使企业 $j$ 当期收益（利润）最大化的产量为下式的解：

$$\max_{q_j}(a - q^* - c)q_j .$$

其解为 $q_j = (a - q^* - c)/2$，相应的利润为 $(a - q^* - c)^2/4$，我们仍用 $\pi_d$ 表示。当下式成立时，两个企业都采取上面给出的触发战略为纳什均衡

$$\frac{1}{1-\delta}\cdot\pi^* \geqslant \pi_d + \frac{\delta}{1-\delta}\cdot\pi_c .$$

解由此式形成的关于 $q^*$ 的二次方程，可得令上面给出的触发战略成为子博弈精炼纳什均衡的 $q^*$

$$q^* = \frac{9-5\delta}{3(9-\delta)}(a-c) ,$$

它随 $\delta$ 单调递减，且当 $\delta$ 达到 9/17 时，达到 $q_m/2$，当 $\delta$ 达到 0 时达到 $q_c$。

下面我们试着使用第二种方法，它的出发点是威胁使用最严厉的可信的惩罚。阿布勒(1986)将这一思路运用于古诺模型中，比我们使用一个任

意的贴现因子更具有一般性;这里只简单证明在我们的模型中,如果用阿布勒的方法,在 $\delta=1/2$(小于 $q/17$)时,也可以达到垄断产量。考虑下面的"两面"(two-phase)(亦称胡萝卜加大棒(carrot-and-stick))战略:

> 在第一阶段生产垄断产量的一半,$q_m/2$。第 $t$ 阶段,如果两个企业在第 $t-1$ 阶段都生产 $q_m/2$,则生产 $q_m/2$;如果两个企业在 $t-1$ 阶段的产量都是 $x$,则生产 $q_m/2$;其他情况下生产 $x$。

这一战略为参与者提供了两种手段:其一是(单阶段的)惩罚,这时企业生产 $x$;其二是(潜在无限阶段的)合作,这时企业的产量为 $q_m/2$。如果任何一个企业偏离了合作,则惩罚开始,如果任何一个企业背离了惩罚,则会使博弈进入又一轮惩罚。如果两个企业都不背离惩罚,则在下一阶段又回到合作。

如果两企业都生产 $x$,每个企业的利润为 $(a-2x-c)x$,我们用 $\pi(x)$ 表示。令 $V(x)$ 表示当期的利润为 $\pi(x)$,以后每阶段的利润永远是垄断利润的一半,企业总收益的现值:

$$V(x)=\pi(x)+\frac{\delta}{1-\delta}\cdot\frac{1}{2}\pi_m\ .$$

如果企业 $i$ 计划在当期生产 $x$,则使企业 $j$ 利润最大化的产出为下式的解

$$\max_{q_j}(a-q_j-x-c)q_j\ .$$

其解为 $q_j=(a-x-c)/2$,相应的利润为 $(a-x-c)^2/4$,我们用 $\pi_{dp}(x)$ 表示,其中 $dp$ 的含义是对惩罚的背离。

如果两家企业都采用上面的两面战略,则无限重复博弈里的子博弈就可归为两类:(i)合作的子博弈,其前面一个阶段的结果是 $(q_m/2,q_m/2)$ 或 $(x,x)$;(ii)惩罚的子博弈,其前面一个阶段的结果既非 $(q_m/2,q_m/2)$,又不是 $(x,x)$。两企业都采取上面的两面战略要成为一个子博弈精炼纳什均衡,则在其每一类子博弈中遵循该战略必须是纳什均衡。具体地说,在合作的子博弈中,每一企业与本期得到 $\pi_d$ 的收益,且下期得到惩罚的现值收益 $V(x)$ 相比,必须更愿意永远得到垄断收益的一半:

$$\frac{1}{1-\delta}\cdot\frac{1}{2}\pi_m\geq\pi_d+\delta V(x)\ . \tag{2.3.3}$$

在惩罚的子博弈中,每一企业与本期得到 $\pi_{dp}$ 的收益,且下期又开始惩罚相比,企业更愿意共同执行惩罚产量:

$$V(x)\geq\pi_{dp}(x)+\delta V(x)\ . \tag{2.3.4}$$

将 $V(x)$ 代入(2.3.3)可得

$$\delta(\frac{1}{2}\pi_m - \pi(x)) \geqslant \pi_d - \frac{1}{2}\pi_m .$$

它表示，在本期背离所得的好处必须不大于下一期惩罚带来损失的现值(假设两个企业都不背离惩罚期，则下一阶段之后就没有损失了，因为惩罚已经结束，企业又回到垄断产出，就像根本没发生过背离一样)。同样，(2.3.4)又可写成

$$\delta(\frac{1}{2}\pi_m - \pi(x)) \geqslant \pi_{dp}(x) - \pi(x) ,$$

其含义与上面是相似的。对 $\delta=1/2$，如果 $x/(a-c)$ 不在 1/8 到 3/8 之间，(2.3.3)式即可满足，并且如果 $x/(a-c)$ 处于 3/10 到 1/2 之间，(2.3.4)式亦可满足。从而，对 $\delta=1/2$ 可达到垄断产出的两面战略成为子博弈精炼纳什均衡的条件是 $3/8 \leqslant x/(a-c) \leqslant 1/2$。

此外，还有许多其他的动态寡头垄断模型，内容比这里介绍的简单模型更加深入和丰富。在本节最后，我们简要讨论这些模型中的两类：状态变量(state-variable)模型和不完美监督(imperfect-monitoring)模型。两类模型除寡头垄断之外还有许多应用，例如，下一节介绍的效率工资模型便是不完美监督的一个例子。

罗滕贝格和萨隆纳(Rotemberg & Saloner，1986 及习题 2.14)通过允许需求函数的截距在不同阶段随机波动，研究了存在商业周期时的串谋。在每一阶段，所有企业在选择该阶段的行动之前都可观测到那一阶段需求函数的截距；在另外的应用中，参与者在每一阶段的开始可以观测到另一个状态变量的值。这种情况下，背离一个给定战略的动机不仅依赖于当期的需求值，还决定于将来阶段可能的需求。(罗滕贝格和萨隆纳假定需求在各阶段是独立的，这样对后面的考虑与当期的需求值也是独立的，但其后的研究放松了这一假定。)

格林和波特(Green & Porter，1984)研究了在背离无法完美地被观测时的共谋：企业不再能观测到另外企业的产出选择，每个企业只能观测到市场出清价格，而这一价格在每一阶段又会受到无法观测的因素的冲击。在这样的条件下，企业无法分辨市场出清价格的降低是由于另外企业背离形成的，还是其他不利因素的冲击带来的。格林和波特检验了触发价格均衡，其中，任何低于触发水平的价格都会引发一个惩罚阶段，在惩罚阶段所有企业都选择古诺产出。在均衡条件下，没有企业会背离。然而，市场因素一次严重的不利冲击也会使价格降至触发点之下，从而引发一个惩罚阶段，由于惩罚是由偶然因素引发的，本节所分析的触发战略里惩罚将无限地持续下去

的做法就不再是最优的,而由阿布勒分析的两面战略更为合理,事实上,阿布勒、皮尔斯和斯泰切提(Pearce & Stacchetti, 1986)证明了它们可以成为最优选择。

### 2.3.D 效率工资

在效率工资的模型中,一个企业劳动力的产出决定于企业支付的工资水平。在发展中国家的环境中,更高的工资收入可提供更好的营养;在发达国家,更高的工资收入可吸引更多有能力的工人到企业求职,或者可以激励现有工人更加努力工作。

夏皮罗和施蒂格里茨(1984)就此建立了一个动态模型,其中企业为激励工人努力工作,一方面支付很高的薪水;同时又威胁一旦被发现偷懒,立即开除。作为这种高薪的一个后果,企业减少了对劳动力的需求,造成部分工人的高薪就业,但其他工人(非自愿)失业并存。失业工人的人数越多,一个被解雇的工人寻找新的工作岗位所需时间越长,于是解雇的威胁就更加有效。在竞争均衡条件下,工资水平 $w$ 和失业率 $u$ 恰好可以使工人不去偷懒,并且企业在工资水平 $w$ 时的劳动需求恰好使失业率等于 $u$。我们分析一个企业和一个工人的情况,从重复博弈的角度研究这一模型(而不考虑其竞争均衡的特点)。

考虑如下的阶段博弈:第一,企业对工人开出一个工资水平 $w$;第二,工人接受或拒绝企业的开价。如果工人拒绝了 $w$,则工人成为自我雇佣者,工资水平为 $w_0$,如果工人接受了 $w$,则工人选择是努力工作(会带来 $e$ 的负效用)还是偷懒(不会带来任何负效用)。工人对努力程度的决策企业无法观测,但企业和工人都可观测到工人的产出水平。产出可能高也可能低,为简单起见,我们认为低水平的产出为 0,高水平的产出为 $y>0$。假设如果工人努力工作则肯定可以得到高产出,但如果工人偷懒则以 $p$ 的概率得到高产出,$1-p$ 的概率得到低产出。从而,在此模型中,低产出是偷懒无可辩驳的证据。

假设企业以 $w$ 的工资雇佣了工人,那么如果工人努力工作,带来高产出时参与人的收益分别为:企业 $y-w$,工人 $w-e$。如果工人偷懒,则 $e$ 变为 0;如果出现低产出,则 $y$ 变为 0。我们假定 $y-e>w_0>py$,从而对工人来讲,受雇于企业并且努力工作是有效率的,工人自我雇佣要优于受雇于企业并偷懒。

这一阶段博弈的子博弈精炼解是使人失望的:因为企业先付给工人工资 $w$,工人没有动机去努力工作,于是企业将开出 $w=0$(或任何其他的 $w$

$\leqslant w_0$)且工人选择自我雇佣。不过,在无限重复博弈中,企业通过给工人高于 $w_0$ 的工资水平 $w$,并且威胁一旦低产出出现,就将工人开除,是可以激励工人努力工作的。下面我们证明在某些取值范围内,企业给出较高的工资并借此激励工人努力工作是值得的。

我们也许会想,为什么企业和工人不能签订一个依据产出水平的补偿合同,从而激励工人努力工作。这样的合同也许不合适,原因之一是法院要执行这样的合约将十分困难,也许因为对产出合适的计量方法包含了产出的质量、生产条件方面预想不到的困难等等。更为一般地讲,依赖于产量的合约总不会是完美的(并不是完全不可行),但对这里我们研究重复博弈中的激励仍有一定作用。

考虑无限重复博弈中下面的战略,其中包含了将在以后决定的 $w^* > w_0$。如果所有前面的工资开价都是 $w^*$,所有的开价都被接受了,并且所有前期的产出都是高的,我们就称博弈的过程是"高工资、高产出"。企业的战略为第一阶段开出工资水平 $w = w^*$,并且在其后的每一阶段,如果博弈的过程是高工资、高产出,则继续开出工资水平 $w^*$;但其他情况下开出 $w = 0$。工人的战略为如果 $w \geqslant w_0$,则接受企业的工资(否则,选择自我雇佣),并且如果博弈的过程(包括本阶段的工资)是高工资、高产出,则努力工作(否则偷懒)。

企业的战略类似于前两节所分析的触发战略:如果在前面所有阶段的博弈中都相互合作就继续合作,但一旦有一次合作被打破,就永远转向阶段博弈的子博弈精炼解。工人的战略也类似于这样的触发战略,但由于工人在序贯行动的阶段博弈中的行动在后,其战略也更加灵活一些。在一个基于同时行动阶段博弈的重复博弈中,一方的背离只能在某一阶段结束时才可观测到;不过当阶段博弈是序贯行动时,首先行动方的背离在同一阶段就可被观测到(并且可对其作出反应)。工人的战略将会是:如果前面所有阶段的博弈都合作则继续合作,但如果企业一旦有背离就选择自己本阶段的最优行动,因为他知道将来所有阶段的博弈都将出现阶段博弈的子博弈精炼解。具体地说,如果 $w \neq w^*$,但 $w \geqslant w_0$,则工人将接受企业的工资但选择偷懒。

下面我们将导出上述双方的战略成为子博弈精炼纳什均衡的条件。同前面两节中一样,论证由两部分组成:(i)导出双方战略成为纳什均衡的条件,(ii)证明它们是子博弈精炼的。

假设企业在第一阶段开出的工资是 $w^*$。给定企业的战略,工人接受这一工资水平是最优的。如果工人努力工作,则他可以肯定得到高产出,那

么企业将再次开出工资水平 $w^*$，而工人将在下一阶段就努力与否进行相同的决策。从而，如果对工人来讲努力工作是最优的，则工人收益的现值为

$$V_e=(w^*-e)+\delta V_e \quad 或 \quad V_e=(w^*-e)/(1-\delta)\ .$$

不过，如果工人偷懒，则工人将以 $p$ 的概率得到高产出，这时下一阶段他还可以就努力与否进行决策；但工人还将以 $1-p$ 的概率得到低产出，这时企业将在以后永远开出工资 $w=0$，于是工人亦将永远选择自我雇佣。从而，如果对工人来讲偷懒是最优的，则工人收益的现值（期望值）为

$$V_s=w^*+\delta\{pV_s+(1-p)\frac{w_0}{1-\delta}\}$$

或

$$V_s=[(1-\delta)w^*+\delta(1-p)w_0]/(1-\delta_p)(1-\delta)\ .$$

对工人来讲，如果 $V_e>V_s$，选择努力工作是最优的，即

$$w^*\geqslant w_0+\frac{1-p\delta}{\delta(1-p)}e=w_0+(1+\frac{1-\delta}{\delta(1-p)})e\ . \qquad (2.3.5)$$

于是，为激励工人努力工作，企业必须向工人支付的，不仅是以补偿工人自我雇佣时的机会收入以及努力工作带来的负效用 $w_0+e$，还包含工资升水 $(1-\delta)e/\delta(1-p)$。很自然地，如果 $p$ 接近于 1（即如果偷懒很难被发现），则工资升水必须非常高才可以激励工人努力工作。另一方面，如果 $p=0$，则在下式成立时，工人努力工作是最优的

$$\frac{1}{1-\delta}(w^*-e)\geqslant w^*+\frac{\delta}{1-\delta}w_0\ , \qquad (2.3.6)$$

上式的导出与前两节关于完美监督的分析中(2.3.1)和(2.3.2)相似，而(2.3.6)又可以化为下式：

$$w^*\geqslant w_0+(1+\frac{1-\delta}{\delta})e\ ,$$

它的确是(2.3.5)中 $p=0$ 时的情况。

即使(2.3.5)成立，从而令工人的战略为其对企业战略的最优反应，还应该研究企业支付 $w^*$ 是否值得。给定工人的战略，企业在第一阶段的问题可归为就以下进行选择：(1)支付 $w=w^*$，并通过威胁工人一旦出现低产出就将其开除来激励工人努力工作，这样每一阶段都可得到 $y-w^*$ 的收益；和(2)支付 $w=0$，促使工人选择自我雇佣，自己在每一阶段的收益均为0。于是，企业战略成为工人战略最优反应的条件为

$$y-w^*\geqslant 0\ . \qquad (2.3.7)$$

前面我们已假定 $y-e>w_0$（即对工人而言，选择受雇于企业并努力工作是有效率的）。但要使双方战略成为子博弈精炼纳什均衡，我们还要求进一步

的条件:(2.3.5)和(2.3.7)合并为

$$y-e \geqslant w_0+\frac{1-\delta}{\delta(1-p)} e .$$

对此,我们仍可以沿用前面的解释,即要使合作能够得以维持,贴现因子 $\delta$ 的值必须足够大。

到此为止,我们已证明如果(2.3.5)和(2.3.7)成立,则前面给出的战略为纳什均衡。为证明这些战略同时又是子博弈精炼的,首先需定义原重复博弈的子博弈。我们前面讲过,在阶段博弈为同时行动时,重复博弈的子博弈由原重复博弈的两个阶段之间开始,在这里分析的阶段博弈为序贯行动的情况下,子博弈不仅在阶段之间开始,还可以始于每一阶段之中——在工人观测到企业给出的工资水平以后。给定参与者的战略,我们可以把子博弈归为两类:始于高工资、高产出之后的子博弈,以及其他进行过程之后的子博弈。我们已证明前一种博弈进行过程下,参与者的战略为纳什均衡,余下的就是要证明后一种过程下的情况:由于工人将来不再会努力工作,企业促使工人选择自我就业是最优的;由于企业将在下一阶段及其后永远支付工资 $w=0$,工人在当前阶段也不会努力工作,并只有在 $w \geqslant w_0$ 时才会接受给付的工资。

在这一均衡中,自我雇佣是永远性的:如果工人曾有一次被捉住偷懒,则企业在其后将永远给付工资 $w=0$;如果企业曾偏离 $w=w^*$(最优工资),则工人将永不再努力工作,于是企业也不会再雇佣这个工人。可以有很多理由对这种永远自我雇佣的合理性提出疑问。在我们单一企业、单一工人的模型中,和永远选择阶段博弈的子博弈精炼解相比,双方参与者都会更愿意回到无限重复博弈的高工资、高产出均衡去,这涉及到第2.3.A节介绍过的重新谈判。当时提到,如果参与者知道惩罚将不会被执行,则以这种惩罚相威胁促成的合作便不再是一个均衡。

在存在劳动力市场的情况下,如果企业同时雇佣了许多工人,则它更倾向于不进行重新谈判,因为和一个工人的重新谈判会使处于高工资、高产出均衡的其他工人(或将要选择这一均衡的工人)十分失望而改变战略。如果存在许多企业,问题成为企业 $j$ 是否会雇佣以前企业 $i$ 曾雇佣的工人。合理的结果可能是"否",因为它担心会使现有高工资、高产出的工人失望,正如一个企业的情况一样。诸如此类的原因可以解释为什么日本大企业间白领男性的成年雇员缺乏流动性。

换一种情况,如果被解雇的工人总可以找到比自我雇佣更喜欢的工作,则这时那些新工作的工资(减去努力带来的负效用)就起到了自我雇佣收入

$w_0$ 的作用。在一个被解雇工人根本不会受到任何损失的极端情况下，在无限重复博弈中无法提供对偷懒有效的惩罚，从而也不存在工人将努力工作的子博弈精炼纳什均衡。参见布洛和罗戈夫(Bulow & Rogoff, 1989)就同一思路提供的一个关于国家债务的精致的例子：如果一个债务国能够在国际资本市场上通过预先收款的短期交易重复从债权国借入长期贷款，则在无限重复博弈中对债务国和债权国之间的违约行为就没有一个可行的惩罚方案。

### 2.3.E 时间一致性的(Time-Consistent)货币政策

考虑如下序贯行动博弈，其中雇主和工人就名义工资进行谈判，之后货币当局选择货币供给，货币供给量又决定了通货膨胀率。如果工资合同无法完美地指数化，雇主和工人在决定工资时都将尽力去预测通货膨胀的因素。不过，一个不完美指数化的名义工资一旦设定，真实的通货膨胀率如高于预测的通货膨胀率，将会使工人实际收入下降，导致雇主扩大雇佣人数，扩张生产。这样货币当局也要就通货膨胀成本和意料之外的通货膨胀使失业率降低及总产出提高之间进行权衡(即高于预测水平之上的通货膨胀)。

我们用下面的阶段博弈来分析这一问题的简化形式，参见巴罗和戈登(Barro & Gordon, 1983)。首先，雇主形成一个对通货膨胀的预期值 $\pi^e$；第二，货币当局观测到这一预期并选择真实的通货膨胀率 $\pi$。雇主的收益为 $-(\pi-\pi^e)^2$。即雇主总是简单地试图正确预测通货膨胀率，在 $\pi=\pi^e$ 时他们达到收益最大化(最大化收益为0)。货币当局从自身目标出发，希望通货膨胀率为0，但产出($y$)能达到有效率的水平($y^*$)。我们可以把货币当局的收益用下式表示：

$$U(\pi, y) = -c\pi^2 - (y-y^*)^2 \quad ,$$

其中的参数 $c>0$ 代表了货币当局在两个目标之间的替代关系。假设真实产出可表示为如下的目标产出和意料外通货膨胀的函数：

$$y = by^* + d(\pi - \pi^e) \quad ,$$

其中，$b<1$ 反映了产品市场上垄断力量的存在(从而如果没有意料外的通货膨胀则真实产出小于有效率的产出水平)，且 $d>0$ 表示意料外通货膨胀通过真实工资对产出的作用，正如前面一段已经提到的。由此我们可以将货币当局的收益重新表示为

$$W(\pi, \pi^e) = -c\pi^2 - [(b-1)y^* + d(\pi-\pi^e)]^2 \ .$$

为解出这一阶段博弈的子博弈精炼解，首先我们计算对给定的雇主期望的通货膨胀率 $\pi^e$，货币当局的最优选择。令 $W(\pi, \pi^e)$ 最大化可得

$$\pi^*(\pi^e)=\frac{d}{c+d^2}[(1-b)y^*+d\pi^e] \ . \tag{2.3.8}$$

由于雇主们预测到货币当局将选择 $\pi^*(\pi^e)$，雇主的问题就是选择 $\pi^e$，使 $-[\pi^*(\pi^e)-\pi^e]^2$ 最大化，得到 $\pi^*(\pi^e)=\pi^e$ 或

$$\pi^e=\frac{d(1-b)}{c}y^*=\pi_s \quad ,$$

其中 $\pi$ 的脚标 $s$ 代表了"阶段博弈"(stage game)。由此，我们可以等价地说，雇主持有的理性期望值为将在随后被货币当局所确认证实的通货膨胀水平，因为 $\pi^*(\pi^e)=\pi^e$，从而又有 $\pi^e=\pi_s$。当雇主持有的期望值 $\pi^e=\pi_s$ 时，货币当局设定的 $\pi$ 略高于 $\pi_s$ 的边际成本刚好抵消掉意料外通货膨胀的边际利益。在这一子博弈精炼解中，货币当局被预测到要实施通货膨胀，并且事实上也是如此，但如果它能承诺不实行通货膨胀政策就可提高其福利水平。事实上，如果雇主们持有理性预期(即 $\pi=\pi^e$)，零通货膨胀率将使货币当局的收益达到最大(即当 $\pi=\pi^e$ 时，$W(\pi,\pi^e)=-c\pi^2-(b-1)^2y^{*2}$，这时 $\pi=0$ 是最优的)。

现在考虑双方参与者的贴现因子都为 $\delta$ 时无限重复博弈的情况。我们将导出双方的下述战略成为子博弈精炼纳什均衡的条件，从而使每一阶段 $\pi=\pi^e=0$。在第一阶段，雇主们持有预期 $\pi^e=0$，在其后各阶段，如果所有前期的预期 $\pi^e$ 都为 0 并且所有前期的真实通货膨胀率 $\pi$ 也都为 0，则持有预期 $\pi^e=0$，否则，雇主持有预期 $\pi^e=\pi_s$——从阶段博弈导出的理性预期。相似地，在当期预期 $\pi^e=0$ 并且所有以前的预期 $\pi^e$ 都为 0，且所有以前的真实通货膨胀率 $\pi$ 都为 0 时，货币当局选择令 $\pi=0$ 的货币供给；否则，货币当局设定 $\pi=\pi^*(\pi^e)$——对雇主期望值的最优反应，正如(2.3.8)给出的。

假设雇主们在第一阶段持有的通货膨胀预期为 $\pi^e=0$。给定雇主们的战略(即在雇主们观测到真实的通货膨胀水平之后对其预期的调整方式)，货币当局可以只集中考虑对如下两个方案的选择：(1) $\pi=0$，它将使下一阶段的 $\pi^e=0$，从而使货币当局在下一阶段仍可面临同样的选择；及(2)从(2.3.8)式计算得出的阶段最优选择 $\pi=\pi^*(0)$，它将使得此后所有的 $\pi^e=\pi_s$，这种情况下货币当局将发现此后永远选择 $\pi=\pi_s$ 也是最优的。在本期选择 $\pi=0$ 可使得每一期的收益均为 $W(0,0)$，而在本期选择 $\pi=\pi^*(0)$ 可使本期的收益为 $W(\pi^*(0),0)$，但其后每期的收益永远为 $W(\pi_s,\pi_s)$。从而，当下式成立时，货币当局的战略是雇主调整方式的最优反应：

$$\frac{1}{1-\delta}W(0,0) \geqslant W(\pi^*(0),0) + \frac{\delta}{1-\delta}W(\pi_s,\pi_s) . \qquad (2.3.9)$$

此式与(2.3.6)是类似的。

通过对(2.3.9)的简化可得 $\delta \geqslant c/(2c+d^2)$。参数 $c$ 和 $d$ 都起到两方面的效果。例如，在 $d$ 增大时，可使意料之外的通货膨胀对产出影响的效果增大，但同样的原因 $d$ 的增大又使得阶段博弈的解 $\pi_s$ 增大，后者又增大了惩罚对货币当局的效果。类似地，$c$ 的增大使得通货膨胀更为痛苦。从而使意料外通货膨胀吸引力减小，但同时又使 $\pi_s$ 下降。在两种情况下，后一作用都超过了前一影响，因而贴现因子的临界值也必须支持这一均衡：$c/(2c+d^2)$随 $d$ 的增大而递减，随 $c$ 而递增。

至此，我们已证明了如果(2.3.9)式成立，货币当局的战略是雇主战略的最优反应。要证明这一组战略是纳什均衡，还须证明后者是前者的最优反应。我们可以看到，根据这一战略，雇主们每一期都可得到其最优的可能收益(即为 0)，因此雇主的战略是最优战略。证明这一组战略是子博弈精炼的程序与上一节相似。

## 2.4 完全非完美信息动态博弈

### 2.4.A 博弈的扩展式表述

在第 1 章我们运用博弈的标准式表述分析了静态博弈，这里我们引入博弈的扩展式表述并用它分析动态博弈。[①] 这一解释方法可能会给人一个印象，那就是静态博弈一定要用标准式表述，动态博弈一定要用扩展式表述。但这是一种误解，任何博弈都既可以用标准式表述，又可以用扩展式表述，尽管对某些博弈来讲，用其中一种表述形式分析起来较另外一种要方便一些。我们将讨论如何利用扩展形式表述一个静态博弈，以及如何利用标准式来表述一个动态博弈。

在第 1.1.A 节曾经讲过，一个博弈的标准式表述包含的要素有：(1)博弈的参与人；(2)每一参与人可供选择的战略，及(3)与参与者可能选择的每一战略组合相对应的各个参与者的收益。

① 本书只给出扩展式的非正式描述，要进一步了解精确的理论，请参考克雷普斯和威尔逊(1982)。

**定义** 一个博弈的扩展式表述包括:(1)博弈中的参与人;(2a)每一参与者在何时行动;(2b)每次轮到某一参与者行动时,可供他选择的行动;(2c)每次轮到某一参与者行动时,他所了解的信息;及(3)与参与者可能选择的每一行动组合相对应的各个参与者的收益。

事实上,在第2.1到2.3节我们已经分析过几个用扩展式表述的博弈,尽管当时没有明确这一概念。本节的主要内容是引入博弈树描述博弈的扩展式,而不是文字描述,因为前者在通常情况下更便于表示和分析。

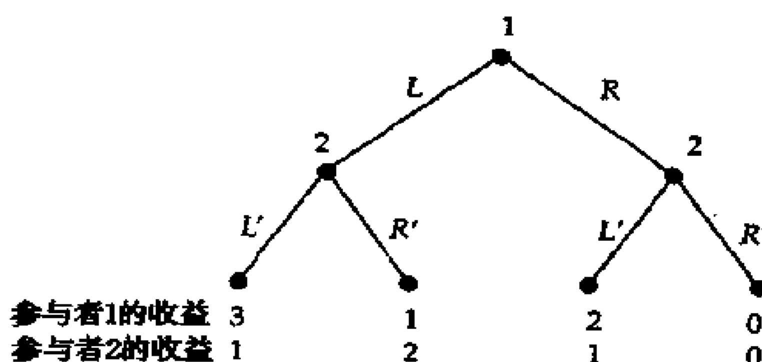



图2.4.1

作为博弈扩展式表述的一个例子,考虑属于第2.1.A节介绍过的完全且完美信息两阶段博弈的一个具体例子:

1. 参与者1从可行集 $A_1=\{L,R\}$ 中选择行动 $a_1$;

2. 参与者2观测到 $a_1$,然后从可行集 $A_2=\{L',R'\}$ 中选择行动 $a_2$;

3. 两参与者的收益分别为 $u_1(a_1,a_2)$ 和 $u_2(a_1,a_2)$,如图2.4.1的博弈树所示。

这一博弈树始于参与者1的一个决策节(decision node),这时1要从 $L$ 和 $R$ 中作出选择,如果参与者1选择 $L$,其后就到达参与者2的一个决策节,这时2要从 $L'$ 和 $R'$ 中选择行动。类似地,如果参与者1选择 $R$,则将到达参与者2的另一个决策节,这时2从 $L'$ 和 $R'$ 中选择行动。无论2选择了哪一个,都将到达终点节(terminal node)(即博弈结束)且两参与者分别得到相应终点节下面的收益。

用类似的方法可将图2.4.1的博弈树进行扩展,用来表示所有完全且完美信息动态博弈——即任何参与者顺序行动、对下一行动作出选择之前其前面所有行动都是共同知识,并且每一可能的行动组合下各参与者的收

益也是共同知识的博弈。(如斯塔克尔贝里模型中行动空间连续的情况,或鲁宾斯坦模型中行动空间无限的情况,只是给图形表示带来了困难,但从概念上讲却没有任何障碍。)此后我们将导出图 2.4.1 所示动态博弈的标准式表述,并在本节的最后证明静态博弈也可以给出扩展式表述,并介绍如何构建完全非完美信息动态博弈的扩展式表述。

正如在对标准式和扩展式定义中的序号所代表的,标准式定义中"一个参与者可行的战略"(第二条)与扩展式定义中"一个参与者何时行动、他可以如何行动及他了解什么信息"(第 2$a$、2$b$ 和 2$c$ 条),有着非常密切的关系。为把一个动态博弈表示为标准式,我们需把扩展式中的信息转换为对标准式中每一参与者战略空间的描述。为做到这一点,回顾第 2.3.B 节给出的"战略"的(非正式)定义:

**定义** 参与者的一个战略是关于行动的一个完整计划——它明确了在参与者可能会遇到的每一种情况下对可行行动的选择。

要求参与者的一个战略明确该参与者可能会遇到的每一种情况下的行动选择,看起来似乎是不必要的。不过,很快我们将会看到,如果允许参与者的一个战略中没有明确某些情况下该参与者的行动,我们将无法在完全信息动态博弈中使用纳什均衡概念。在参与者 $j$ 计算针对参与者 $i$ 的战略的最优反应时,$j$ 需要考虑在每一种情况下 $i$ 将如何行动,而并非仅考虑在 $i$ 或 $j$ 认为最有可能发生的情况下对方的行动。

在图 2.4.1 的博弈中,参与者 2 有两个行动,却有 4 个战略;因为还存在着两种不同的情况(具体地说,分别是观测到参与者 1 选择 $L$ 和观测到参与者 1 选择 $R$ 后的情况),参与者 2 将可能在这两种情况下进行选择:

战略 1:如果参与者 1 选择 $L$,则选择 $L'$,如果参与者 1 选择 $R$,则选择 $L'$,表示为$(L', L')$;

战略 2:如果参与者 1 选择 $L$,则选择 $L'$,如果参与者 1 选择 $R$,则选择 $R'$,表示为$(L', R')$;

战略 3:如果参与者 1 选择 $L$,则选择 $R'$;如果参与者 1 选择 $R$,则选择 $L'$,表示为$(R', R')$;

战略 4:如果参与者 1 选择 $L$,则选择 $R'$,如果参与者 1 选择 $R$,则选择 $R'$,表示为$(R', R')$。

不过对参与者 1 来讲,有两个行动但同时也只有两个战略:选择 $L$ 和选择 $R$。参与者 1 之所以只有两个战略,是因为参与者 1 行动时只有可能面临

一种情况(具体地说,就是在博弈的一开始,这时自然由参与者1行动),于是参与者1的战略空间与其行动空间是相同的,即 $A_1=\{L,R\}$。

给出两参与者的战略空间后,从博弈的扩展式表述导出其标准式表述就十分简单了。用标准式表述中的行表示参与者1的可行战略,列表示参与者2的可行战略,并计算参与者每一可能的战略组合下每人的收益,如图2.4.2所示。

参与者2

| | | $(L',L')$ | $(L',R')$ | $(R',L')$ | $(R',R')$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 参与者1 | $L$ | 3,1 | 3,1 | 1,2 | 1,2 |
| | $R$ | 2,1 | 0,0 | 2,1 | 0,0 |

图2.4.2

现在我们已证明一个动态博弈可以表示为标准式,下面我们反过来说明一个静态(即同时行动)博弈如何用扩展式表述。要做到这一点,我们要运用第1.1.A节与囚徒困境相关的一个观察结果,静态博弈中参与者不一定要同时行动:每个参与者在选择战略时不知道其他参与者的选择就足够了。正如囚徒困境中分开关押的囚犯可以在任何时间作出他们的决策。从而我们可以把(所谓的)参与者1和2之间的同时行动博弈表示如下:

1. 参与者1从可行集中选择行动 $a_1$;
2. 参与者2没有观测到参与者1的行动,并从可行集中选择行动 $a_2$;
3. 两参与者的收益分别为 $u_1(a_1,a_2)$ 和 $u_2(a_1,a_2)$。

或换一种顺序,参与者2可以首先行动,接着参与者1在没有观测到参与者2行动的情况下行动。回顾我们在第2.1.B节介绍的斯塔克尔贝里博弈,企业2在行动之前观测到企业1的产量,当时还提到一个与之时序完全相同,但信息结构却不同的情况,那里我们证明,在这一序贯行动,并不能观测到其他参与者行动的博弈中,有着和同时行动的古诺博弈相同的纳什均衡。

为在博弈的扩展式中表示此类不知道以前行动的情况,我们引入一个新的概念——参与者的信息集(information set):

**定义** 参与者的一个信息集指满足以下条件的决策节的集合:

(i)在此信息集中的每一个节都轮到该参与者行动,且

(ii)当博弈的进行达到信息集中的一个结，应该行动的参与者并不知道达到了(或没有达到)信息集中的哪一个节。

这一定义的第(ii)部分意味着参与者在一个信息集中的每一个决策节都有着相同的可行行动集合，否则该参与者就可通过他面临的不同的可行行动集来推断到达了(或没有到达)某些节。

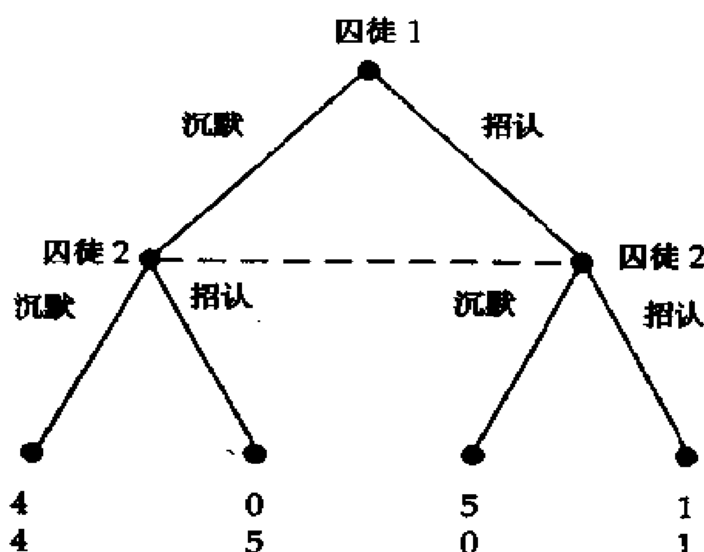



图 2.4.3

在一个扩展式博弈中，为表示某些决策节处于同一信息集中，我们用虚线把这些决策节连起来，如图2.4.3给出的囚徒困境的扩展式表述。有时我们在同一信息集中每个决策节旁边注明轮到哪一个参与者行动，如图 2.4.3 所示；有时我们只是在连接这些节的虚线上注明轮到哪一参与者行动，如图 2.4.4 所示。图 2.4.3 中，囚徒 2 的信息集表示在轮到囚徒 2 行动时，他只知道到达了这一信息集(即囚徒 1 已经行动过了)，但是并不清楚到达了哪一个节(即囚徒 1 是如何行动的)。在第 4 章中我们将讲到囚徒 2 会对囚徒 1 的行动持有一个猜测或推断，即使他并不能观察到前者的行动，但目前我们暂时不考虑这一因素。

作为运用信息集表示不了解前面行动的第二个例子，考虑下面的完全非完美信息动态博弈：

1.参与者 1 从可行集 $A_1=\{L,R\}$ 中选择行动 $a_1$；

2.参与者 2 观测到 $a_1$，然后从可行集 $A_2=\{L',R'\}$ 中选择行动 $a_2$；

3.参与者 3 观测是否$(a_1,a_2)=(R,R')$，然后从可行集 $A_3=\{L'',R''\}$

中选择行动 $a_3$。

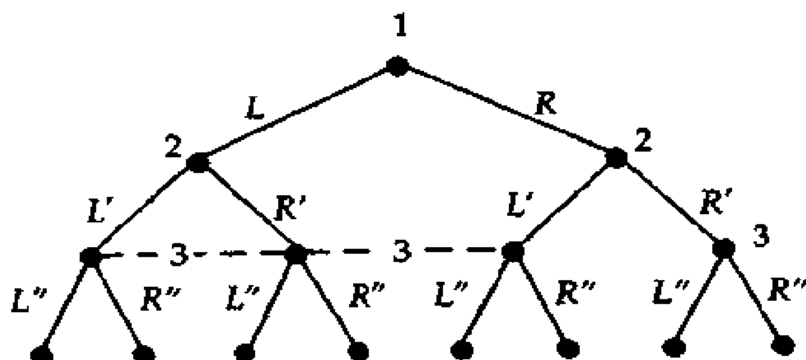



图 2.4.4

这一博弈的扩展式表述(为简化起见,略去每个参与者的相应收益)如图2.4.4所给出。在扩展式中,参与者3有两个信息集:如果1选择 $R$,2选择 $R'$,参与者3进入只有一个决策节的信息集,此种情况之外轮到3行动时,则他进入包含其余所有决策节的信息集。从而,参与者3所能够观测到的只是$(a_1, a_2)$是否等于$(R, R')$。

在引入了信息集的概念之后,我们可以给出区分完美信息和非完美信息的另外一种定义。前面我们曾将完美信息定义为在博弈的每一步行动中,轮到行动的参与者了解前面博弈进行的全部过程。对完美信息的一个等价的定义是每一个信息集都是单节的;相反,非完美信息则意味着至少存在一个非单节的信息集[①]。那么,一个同时行动博弈(如囚徒困境)的扩展式表述就是一个非完美信息博弈。同理,第2.2.A节讨论的两阶段博弈也是非完美信息的,因为参与者1和2的行动是同时的,参与者3和4的行动也是同时的。更为一般地,一个完全但非完美信息动态博弈可用含有非单节信息集的扩展式表示,从而可以看出每一参与者在轮到他行动时,知道(以及不知道)什么,这一点,图2.4.4已给出一个例子。

## 2.4.B 子博弈精炼纳什均衡

第2.3.B节给出了子博弈精炼纳什均衡的一般性定义。但当时我们

① 这种用是否单节信息集区分完美信息和非完美信息的方法只限于完全信息的博弈,因为第4章将会讲到,完美但非完全信息博弈的扩展式表述就含有非单节的信息集,不过,在本章中,我们只讨论完全信息的情况。

只把这一定义用于重复博弈，因为我们只针对重复博弈定义了战略和子博弈的概念。在第2.4.A节我们给出了战略这一概念的一般性定义，现在再给出子博弈的一般性定义，其后就可以把子博弈精炼纳什均衡的概念应用于一般的完全信息动态博弈了。

回顾第2.3.B节我们曾给出的子博弈的非正式定义，即从博弈进行到的某一点开始，前面整个博弈的进行过程在所有参与者中都是共同知识，始于该点的其余部分的博弈就是原博弈的一个子博弈，并针对重复博弈给出了子博弈的正式定义。下面我们对用扩展式表述的一般完全信息动态博弈给出子博弈的正式定义。

**定义** 扩展式博弈中的子博弈

(a) 始于单节信息集的决策节 $n$（但不包括博弈的第一个决策节）；

(b) 包含博弈树中 $n$ 之下所有的决策节和终点节（但不在 $n$ 下面的除外）；

(c) 没有对任何信息集形成分割。（即如果博弈树中 $n$ 之下有一个决策节 $n'$，则和 $n'$ 处于同一信息集的其他决策节也必须在 $n$ 之下，从而也必须包含于子博弈中。）

定义中，(a)的附注说明了我们不把整个博弈看成一个子博弈，但这只是一个习惯问题：把定义中的括号除去对我们以后的分析不会产生任何影响。

我们可以利用图2.4.1和图2.4.3的囚徒困境说明定义中的前两部分(a)和(b)。图2.4.1中，存在两个子博弈，分别始于参与者2的两个决策节。在囚徒困境（或其他任何同时行动博弈）中不存在子博弈。为说明定义的最后部分(c)，考虑图2.4.4给出的博弈，该博弈只有一个子博弈，它始于参与者1选择 $R$，参与者2选择 $R'$ 之后参与者3的决策节。由于(c)的限制，参与者2的两个决策节之下都不能构成一个子博弈，即使这两个决策节都处于单节的信息集。

之所以在定义中要加上(c)的限制，是因为我们希望能够把子博弈当成一个独立的博弈进行分析，并且分析的结果能用于原博弈。在图2.4.4中，如果我们试着把参与者1选择 $L$ 之后参与者2的决策节看成一个子博弈的起点，事实上我们是制造了一个子博弈，其中参与者3不知道参与者2的行动，但却知道参与者1的行动。对这样一个子博弈的分析与原博弈就不存在相关性，因为在原博弈中参与者3并不知道1的行动，而只能观测到 $(a_1, a_2)$ 是否等于 $(R, R')$。请回顾在讨论重复博弈时相似的论证，即第 $t$

阶段的阶段博弈(有限重复时 $t<T$)本身并不是重复博弈的一个子博弈。

对(c)必要性的另一种理解,是(a)只保证了在决策节 n 应该行动的参与者知道博弈到此为止的整个进行过程,而不能保证其他参与者也知道这一过程,(c)则保证了博弈到该点为止的整个过程在所有参与者中是共同知识,原因如下:在 $n$ 之后的任何节,比如 $n'$,在 $n'$ 应该行动的参与者知道博弈到达了决策节 $n$,从而即使 $n'$ 处于非单节的信息集,由于在该信息集中的所有节都在 $n$ 之下,在该信息集行动的参与者就知道博弈已经到达了 $n$ 下面的某个决策节。(如果认为后面的叙述有些拗口,部分因为博弈的标准式表述只明确了在参与者 $i$ 的每一个决策节 $i$ 知道的信息,而并没有明确指出在 $j$ 的决策节 $i$ 知道的信息。)前面已讲过,图 2.4.4 就提供了不符合(c)的一个例子。现在,我们可以重新解释这个例子,如果我们(非正式地)分析一下在参与者 1 选择 $L$ 之后参与者 2 的决策节上参与者 3 知道的信息,就会发现 3 并不知道博弈到该点为止的全部进行过程,因为在其后 3 的决策节中,他并不知道 1 是选择了 $L$ 还是选择了 $R$。

在给出子博弈的一般定义之后,我们就可以使用第 2.3.B 节给出的子博弈精炼纳什均衡的定义了:

**定义**(塞尔滕,1965) 如果参与者的战略在每一个子博弈中都构成了纳什均衡,则称纳什均衡是子博弈精炼的。

任何有限的完全信息动态博弈(即任何参与者有限、每一参与者的可行战略集有限的博弈)都存在子博弈精炼纳什均衡,也许包含混合战略。这一结论的证明思路非常简单,即根据逆向归纳的原理,构建出子博弈精炼纳什均衡,并基于下面两个观察结论。第一,尽管纳什定理是在完全信息静态博弈的条件下给出的,它适用于任何有限的完全信息的标准式博弈,并且我们已经证明此类博弈既可以是静态的,又可以是动态的。第二,一个有限的完全信息动态博弈的子博弈数也是有限的,而每个子博弈都满足纳什定理的假定。[①]

---

① 为构建一个子博弈精炼纳什均衡,首先选定包含原博弈树终点节的所有的最小的子博弈(如果一个子博弈不再包含其他任何子博弈,该子博弈就是最小的)。其后,用这些子博弈的一个纳什均衡收益在原博弈树中替换掉这些子博弈,并把这些子博弈的初始节看成原博弈的终点节。选定包含了简化后博弈树所有终点节的最小的子博弈,并用这些子博弈的一个纳什均衡收益代替这些子博弈。用此方法从树的最末端逆推就可得到一个子博弈精炼纳什均衡,因为参与者的战略在每一个子博弈中都构成了纳什均衡(事实上,还是子博弈精炼纳什均衡)。

我们已介绍过与子博弈精炼纳什均衡密切相关的两个概念：第2.1.A节定义的逆向归纳解和第2.2.A节定义的子博弈精炼解。不太正式地讲，其区别在于一个均衡是战略的集合（战略又是关于行动的完全的计划），而一个解则只对期望将要发生的情况给出相应的行动及结果，而不是针对所有可能发生的情况。要进一步精确界定“均衡”和“解”的区别，并更好地说明子博弈精炼纳什均衡的概念，现在我们重新考虑第2.1.A节和第2.2.A节定义的博弈。

**定义** 在第2.1.A节定义的完全且完美信息两阶段博弈中，逆向归纳解为$(a_1^*, R_2(a_1^*))$，但子博弈精炼纳什均衡为$(a_1^*, R_2(a_1))$。

在这样的博弈中，行动$a_1^*$即为参与者1的一个战略，因为参与者1只可能在一种情况下选择行动——即在博弈刚开始，不过对参与者2，$R_2(a_1^*)$却只是一个行动（具体地说，是对$a_1^*$的最优反应），而并非一个战略，因为参与者2的一个战略必须包含针对1在第一阶段每个可能的行动，参与者2将采取的行动。从而，参与者2的最优反应函数$R_2(a_1)$是其一个战略。在此类博弈中，子博弈始于（并只包含）参与者2在第二阶段的行动。对参与者1的每一个可能行动$a_1$属于$A_1$，都存在一个子博弈，从而为证明$(a_1^*, R_2(a_1))$是一个子博弈精炼纳什均衡，我们必须证明$(a_1^*, R_2(a_1))$是一个纳什均衡，并且参与者的战略在每一个子博弈中都构成一个纳什均衡。由于子博弈都只是单人决策问题，后一问题就可简单化为要求参与者2的行动在每一子博弈中都是最优的，它又正是参与者2的最优反应函数$R_2(a_1)$所解决的问题。最后，$(a_1^*, R_2(a_1)$是一个纳什均衡，因为参与者的战略互为最优反应：$a^*$是$R_2(a_1)$的最优反应，即$a_1^*$令$u_1(a_1 R_2(a_1))$最大化，并且$R_2(a_1)$为$a^*$的最优反应，即$R_2(a_1^*)$令$u_2(a_1^*, a_2)$最大化。

对第2.2.A节分析的博弈，其论证过程是相似的，所以我们只进行简要的讨论。

**定义** 在第2.2.A节定义的完全非完美信息两阶段博弈中，子博弈精炼解为$(a_1^*, a_2^*, a_3^*, (a_1^*, a_2^*), a_4^*(a_1^*, a_2^*))$，但子博弈精炼纳什均衡为$(a_1^*, a_2^*, a_3^*, (a_1^*, a_2^*), a_4^*(a_1^*, a_2^*))$。

在这一博弈中，行动组合$(a_3^*,(a_1^*,a_2^*),a_4^*(a_1^*,a_2^*))$只是参与者 3 和 4 之间一个子博弈的纳什均衡，(具体地说，是参与者 1 和 2 选定战略$(a_1^*,a_2^*)$后其余部分的博弈)而$(a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$却分别为参与者 3 和参与者 4 的一个战略——针对参与者 1 和 2 每一可能行动组合作出反应的完整行动计划。在这一博弈中，子博弈是在给定参与者 1 和 2 在第一阶段的行动后，第二阶段参与者 3 和 4 之间的博弈，正如子博弈精炼纳什均衡所要求的，战略组合$(a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$在每一个子博弈中都构成了纳什均衡。

为总结本节(以及本章)的内容，我们用下面的例子说明本章的主要思想：子博弈精炼剔除了基于不可置信的威胁或承诺之上的纳什均衡。请回顾图 2.4.1 中的扩展式博弈，如果我们在第 2.1.A 节遇到这一博弈，我们就会用逆向归纳法求解如下。如果参与者 2 到达参与者 1 选择 $L$ 之后的决策节，则 2 的最优反应为选择 $R'$(可得到的收益为 2)，而不是选择 $L'$(只能得到 1 的收益)。如果 2 到达参与者 1 选择 $R$ 之下的决策节，则 2 的最优反应为选择 $L'$(可获得的收益为 1)，而不是 $R'$(可得到的收益为 0)。由于参与者 1 能和参与者 2 一样解出 2 的最优选择，1 在第一阶段的问题就可归结为在 $L$(将会令参与者 2 选择 $R'$，从而使 1 的收益为 1)和 $R$(将会使参与者 2 选择 $L'$，从而使 1 的收益为 2)之间进行选择。从而，参与者 1 对预期的 2 的行动的最优反应是在第一阶段选择 $R$，于是博弈的逆向归纳解为$(R,L')$，如在图 2.4.5 中用粗线表示出的始于参与者 1 决策节的路径。图中另外还有一条粗线始自参与者 1 选择 $L$ 之后的参与者 2 的决策节，博弈树中的这种不完全路径表明，如果博弈到达参与者 2 的这一决策节，参与者 2 将会选择 $R'$。

我们已讲过，同一博弈的标准式表述由图 2.4.2 给出。如果我们在第

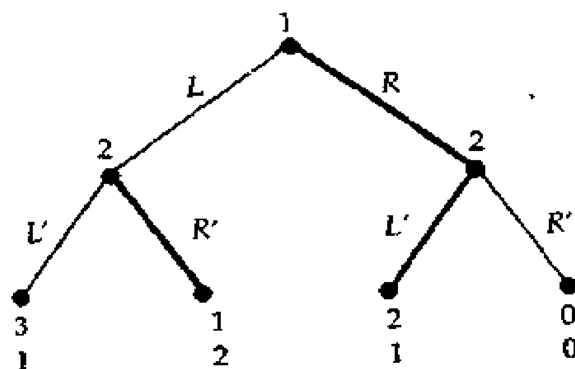



图 2.4.5

1.1.C 节中遇到这么一个标准式博弈，我们将会解出其(纯战略)纳什均衡，它们为$(R,(R',L'))$和$(L,(R',R'))$。下面我们来比较从图 2.4.2 中解出的这两个纳什均衡与图 2.4.5 中根据扩展式逆向归纳法导出的结果：标准式表述中的纳什均衡$(R,(R',L'))$对应了图 2.4.5 中的所有粗线路径。在第 2.1.A 节我们称$(R,L')$为博弈的逆向归纳解，因此也可以十分自然地称$(R,(R',L'))$为博弈的逆向归纳纳什均衡，但我们用较为专业性的名词称之为子博弈精炼纳什均衡。一个解和一个均衡的区别，在于解特指始于博弈的第一个决策节并终于终点节的惟一的粗线路径，而均衡同时还包含了另外的始自 1 选择 $L$ 之后 2 的决策节的粗体线路径，这也就是说，均衡包含了参与者 2 的一个完整的战略。

但另一个纳什均衡$(R,(R',L'))$又有什么特点呢？在这一均衡中，参与者 2 的战略是不仅在参与者 1 选择 $L$ 时选择$R'$(这一条和第一个纳什均衡是相同的)，而且当参与者 1 选择 $R$ 时仍选择$R'$。因为(在 $R$ 之后的)$R'$将使参与者 1 的收益为 0，参与者 1 对参与者 2 这一战略的最优反应将是选择 $L$，以使参与者 1 的收益达到 1(在参与者 2 选择 $R'$之后)，至少优于一无所获。用不太严格却更为形象的话讲，我们可以说参与者 2 威胁如果参与者 1 选择 $R$，他将选择 $R'$(严格地讲，在 1 选择行动之前，2 并没有机会作出这一威胁，如果有，它将已经包含在扩展式之中了)。如果这一威胁起作用了(即 1 选择了 $L$)则 2 就没有机会实践他的威胁，不过这一威胁也不会起作用，因为它是不可信的：如果参与者 2 被给予机会实施他的威胁(即如果 1 的确选择了 $R$)，则参与者 2 将会决定选择 $L'$，而不会是 $R'$。更正式一点儿说，纳什均衡$(L,(R',R'))$不是子博弈精炼的，因为参与者的战略在其中的一个子博弈中没有构成纳什均衡。具体地说，参与者 2 的选择$R'$在始自(并完全由其组成)参与者 1 选择 $R$ 之后参与者 2 的决策节的子博弈中不是最优的。

在一个完全且完美信息博弈中，逆向归纳法可剔除不可信威胁。由于每一个信息集都是单节的，博弈树上每个决策节都分别代表了参与者可能会遇到，并需作出反应的情况。从而在扩展式中，通过每个决策节逐级逆向归纳求解的程序，也就可以看成迫使每个参与者考虑实施他可能作出的每一个威胁。但是，在一个非完美信息博弈中，问题就不那么简单了，因为这种博弈包含了至少一个非单节的信息集。我们也可以试着用相同的方法，在扩展式中通过逆推求解，总是会到达某个处于非单节信息集内的决策节。但如果博弈真的到达了这个决策节，强迫参与者考虑如何行动，并不等于让其考虑在一个可能发生的情况下他将如何行动，因为如果博弈真的进行到

了这个信息集,应该行动的参与者并无法知道是否到达了这个决策节,正是由于此决策节包含在一个非单节的信息集中。

在逆向归纳法中,解决由非单节信息集引起的问题的方法之一,是在扩展式中从后往前逆推求解,直到遇到一个非单节信息集,先暂时不要管它,径直越过该信息集向上,直到到达一个单节信息集。然后,不仅要考虑在这个单节信息集行动的参与者在到达此决策节时如何选择,还要同时分析在刚刚被越过的非单节信息集行动的参与者将会如何选择。一般来说,这一程序最后可得到子博弈精炼纳什均衡。解决上述问题的另一种方法,是先在扩展式中运用逆向归纳的方法,直到遇上了一个非单节信息集,然后强迫在该信息集行动的参与者考虑如果到达了这一信息集将如何选择(要做到这一点,必须要求该参与者对到达了同一信息集中哪一个决策节有一个概率上的判断。这样的判断当然又要依赖于各参与者在博弈树的更上方可能的行动,所以,运用这一方法,只对博弈树从下往上逆推一遍是无法得到结果的)。一般而言,这一程序可以得到一个精炼贝叶斯均衡,参见第4章。

## 2.5 进一步阅读

第2.1节 关于没有工会组织企业的工资和就业,参见埃斯皮诺萨和里(1989,习题2.10)给出的重复谈判模型,以及施泰格(Staiger,1991)给出的单一谈判模型,其中企业可以选择是就工资和就业同时谈判还是只就工资进行谈判。关于序贯谈判,参见费尔南德斯和格莱泽(Fernandez & Glazer,1991)给出的企业和工会间讨价还价的鲁宾斯坦式模型,在原模型的基础上又增加了新的特点,即工会必须决定如果要价被任何一方拒绝,是否要继续进行罢工,这种条件下存在多个有效率的子博弈精炼均衡,同时又支持无效率的均衡(即含有罢工的均衡),即使信息是完全的。奥斯本(Osborne)和鲁宾斯坦(1990)的专著里概括总结了许多博弈理论的讨价还价模型,并将它们与纳什关于讨价还价的公理式方法相联系,并把讨价还价模型看成是市场理论的基石之一。

第2.2节 关于银行挤提,参见杰克林和巴塔查里亚(Jacklin & Bhattacharya,1988)。麦克米伦(McMillan,1986)的著作中概括分析了博弈论在国际经济学领域的早期应用;参见布龙和罗戈夫(Bulon & Rogoff,1989)关

于债务危机的最新研究成果。关于工作竞赛，参见拉齐尔(1989，习题2.8)的模型，其中工人既可以提高自己的产量，同时又可以搞破坏，降低他人的产量；罗森(1986)讨论了一系列工作竞赛的情况，其中一个回合的失败者将不再参加以下回合的竞赛，并求得为维持激励而必须的代价。

第2.3节　贝努瓦和克里希纳(1985)分析了有限重复博弈。关于重新谈判，参见贝努瓦和克里希纳(1989)对有限重复博弈的讨论，以及法雷尔和马斯金(1989)对无限重复博弈的分析和对有关文献的综述。泰勒尔(1988，第6章)总述了动态的寡头垄断模型。阿克尔洛夫和叶林(Akerlof & Yellen，1986)的论文集收集了关于效率工资方面的许多重要论文，并提供了一个整体上的介绍。关于货币政策，鲍尔(Ball，1990)对现存的不同风格模型的前提及分析做了回顾和总结，并给出了一个解释通货膨胀时间路径的模型。

第2.4节　克雷普斯和威尔逊(1982)关于博弈扩展式的正式分析；克雷普斯(1990)还给出了更容易理解的文字表述。

## 2.6 习题

**第2.1节**

2.1　本题取自首先由贝克尔(Becker，1974)提出并分析的一个模型。假设一个家长和他的孩子进行如下的博弈：第一，小孩选择一个行动$A$，可使孩子获得收入$I_c(A)$，并使家长得到收入$I_p(A)$(可以认为$I_c(A)$为孩子减去因$A$发生的各种成本后的净收益)；第二，家长观测到收入$I_c$和$I_p$，然后选择给孩子的奖励或惩罚$B$。孩子的收益为$U(I_c+B)$，家长的收益为$V(I_p-B)+k(I_c+B)$，其中$k>0$反映出家长关心孩子的福利。假定行动是一个非负数字，$A\geqslant 0$，收入函数$I_c(A)$和$I_p(A)$为严格凹且分别在$A_c>0$和$A_p>0$达到最大值；奖励或惩罚$B$为或正或负的数字；且效用函数$U$和$V$递增并严格凹。证明“宠坏的孩子”(Rotten Kid)定理：在逆向归纳解中，孩子选择可使全家收入$I_c(A)+I_p(A)$最大化的行为，尽管在效用函数中，只有家长显示出利他的特点。

2.2　现在假设家长和孩子进行一个不同的博弈，首先由布坎南(Buchanan，1975)所分析。令收入$I_c$和$I_p$为外生给定的，第一，孩子决定收入$I_c$中的多少用于储蓄($S$)以备将来，并消费掉其余部分$I_c-S$。第二，家

长观测到孩子的选择 $S$ 并决定一个赠与额 $B$。孩子的收益为当期和未来的效用之和 $U_1(I_c-S)+U_2(S+B)$；家长的收益为 $V(I_p-B)+k[U_1(I_c-S)+U_2(S+B)]$。假定效用函数 $U_1$、$U_2$ 和 $V$ 递增并且严格凹，证明存在"乐善好施悖论"(Samaritan's Dilemma)：在逆向归纳解中，孩子的储蓄非常少，从而可诱使家长给予更高的赠与(即如果 $S$ 增加，并使 $B$ 相应减少，家长和孩子的福利都会提高)。

2.3　假定鲁宾斯坦的无限期讨价还价博弈中，参与者的贴现因子不同，参与者1为 $\delta_1$，参与者2为 $\delta_2$。运用本书中的论证方法证明在逆向归纳解中，参与者1向2提出的解决方案为

$$\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2},\frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right),$$

并被参与者2接受。

2.4　两合伙人希望能完成一个项目，在项目结束时，每一合伙人得到收益 $V$，但结束前则一无所得，尚需 $R$ 的成本。两合伙人都不能承诺只靠自己的力量完成项目，于是他们决定进行如下的两阶段博弈：在第一阶段，合伙人1选择为完成项目所作的贡献 $c_1$，如果这一贡献足以令项目完成，则博弈结束，每一参与者得到收益 $V$；如果这一贡献不足以令项目完成（即 $c_1<R$），则在第二阶段合伙人2选择为完成项目所作的贡献 $c_2$，如果（不考虑贴现的）两个贡献之和足以完成项目，则博弈结束，每一参与者得到 $V$；如果贡献之和不足以完成项目，则博弈结束，两参与者所得的收益均为0。

每一合伙人必须从其他可带来收益的活动中抽取部分资金，投入到该项目，这样做的最优方法是先从收益最低的其他活动中抽资，结果使贡献的(机会)成本为贡献大小的凸函数。假设对每一参与者贡献 $c$ 的成本为 $c^2$，并假定参与者1对其第二阶段的收益用贴现因子 $\delta$ 进行贴现。针对三个参数 $\{V,R,\delta\}$ 的不同情况，分别计算出此两阶段贡献博弈惟一的逆向归纳解；参见阿德马蒂(Admati)和佩里(Perry)对无限重复情况的讨论。

2.5　假设一家企业希望某工人能投资于企业专门技术 $S$，但此项技术非常模糊，以致法院无法确定工人是否已经掌握。(例如，企业也许会让职工"熟悉我们这儿是如何运作的"或"在我们的某潜在市场成为专家"。)从而企业无法与职工订立契约，偿付工人投资成本；即使职工确实进行了投资，企业也可以声称职工没有进行投资，并且法院无法辨别哪一方是正确的。类似的，如果企业预先支付费用，职工也不能保证会投资于企业的专门

技术。

但是,企业能够通过(可信的)承诺提职来激励职工进行投资,具体方法如下。假设企业里有两个工作岗位,一个容易($E$),一个复杂($D$),并且专门技术对这两个岗位都是有用的,只是对复杂的岗位作用更大一些 $y_{D0} < y_{E0} < y_{ES} < y_{DS}$;,其中 $y_{ij}$表示职工在岗位 $i$($i = E$ 或 $D$)工作、技术水平为 $j$($j = 0$ 或 $S$)时的产出,假定企业可以承诺对不同的岗位支付不同的工资 $w_E$ 及 $w_D$,但每一种工资都不低于工人另谋职业的收入,这里我们通过标准化处理,使后者等于 0。

博弈进行的时间顺序如下:在时点 0 企业选定 $w_E$ 和 $w_D$,工人观测到企业选择的工资水平。在时点 1 工人加入企业并且能够以成本 $c$ 取得技能 $S$(这里我们忽略了第一阶段的产出及工资,由于工人尚未取得技能,企业聘用工人到岗位 $E$ 是有效率的)。假定 $y_{DS}$  $y_{E0} > c$,从而对工人来讲投资学习技术是有效率的。在时点 2 企业观测工人是否取得了技术技能,然后决定是否在工人雇佣的第二(也是最后)阶段提升工人到岗位 $D$。

工人在岗位 $i$ 工作,技术水平为 $j$ 时,企业第二阶段的利润为 $y_{ij} - w_i$。工人第二阶段在岗位 $i$ 工作的收益为 $w_i$ 或 $w_i - c$,决定于工人是否在第一阶段投资于工作技能。请求出博弈的逆向归纳解。参见普伦德加斯特(Prendergast, 1992)内容更为丰富的模型。

**第 2.2 节**

2.6 在一个由三个寡头垄断者操纵的市场,反需求函数由 $P(Q) = a - Q$ 给出,这里 $Q = q_1 + q_2 + q_3$, $q_i$ 表示企业 $i$ 生产的产量。每一企业生产的边际成本为常数 $c$,并且没有固定成本。企业按以下顺序进行产出决策:(1)企业 1 选择 $q_1 \geqslant 0$;(2)企业 2 和 3 观测到 $q_1$,并同时分别选择 $q_2$ 和 $q_3$。求出此博弈的子博弈精炼解。

2.7 假设一个工会是一寡头垄断市场中所有企业惟一的劳动力供给者,就像汽车工人联合会(United Auto Workers)对于通用、福特、克莱斯勒等大的汽车厂家。令博弈各方行动的时间顺序类似于第 2.1.C 节的模型:(1)工会确定单一的工资要求 $w$,适用于所有的企业;(2)每家企业 $i$ 了解到(并接受)$w$,然后同时分别选择各自的雇佣水平 $L_i$;(3)工会的收益为 $(w - w_a)L$,其中 $w_a$ 为工会成员到另外行业谋职可取得的收入,$L = L_1 + \cdots + L_n$ 为工会在本行业企业的总就业水平;企业 $i$ 的利润为 $\pi(w, L_i)$,其中决定企业 $i$ 利润水平的要素如下。

所有企业都有同样的生产函数:产出等于劳动力;$q_i = L_i$。市场总产出为 $Q = q_1 + \cdots + q_n$ 时的市场出清价格为 $p(Q) = a - Q$。为使问题简化,假设企业除工资支出外没有另外的成本。请求出此博弈的子博弈精炼解。在子博弈精炼解中,企业的数量是如何(以及为什么)影响工会效用的?

2.8 根据拉齐尔(1989),对第 2.2.D 节的工作竞赛模型修改如下:令工人 $i$ 的产出为 $y_i = e_i - (1/2)s_j + \varepsilon_i$,其中 $s_j \geq 0$ 代表了工人的故意破坏;并且工人 $i$ 由于(生产及破坏)付出努力产生的负效用为 $g(e_i) + g(s_i)$。证明最优的奖励水平 $w_H - w_L$ 要小于(书中)不考虑进行破坏的情况。

2.9 考虑两个国家,在时点 1,两国的关税都非常高,以致根本没有贸易。在每一个国家内,工资和就业的决定与第 2.1.C 节垄断工会模型相同。在时点 2,所有的关税都取消了,每一工会决定本国的工资水平,但每一企业同时为两国市场生产产品。

假定每一国家的反需求函数为 $P(Q) = a - Q$,其中 $Q$ 为该国市场上的总产量。令每一企业的生产函数为 $q = L$,从而工资为企业的惟一成本,并且令工会的效用函数为 $U(w, L) = (w - w_0)L$,其中 $w_0$ 为工人另谋职业可得收入。请解出时点 1 博弈的逆向归纳解。

下面考虑时点 2 的下述博弈。第一,两工会同时选择工资水平 $w_1$ 和 $w_2$,然后企业 $i$ 观测到工资并选择其国内、国外市场的产出水平,$i$ 国企业的产出(内销和出口)分别用 $h_i$ 和 $e_i$ 表示。企业 $i$ 所有的生产都在本国,于是总成本为 $w_i(h_i + e_i)$,解出子博弈精炼解。证明工资、就业和利润(并且由此决定的工会效用和消费者剩余)在关税取消后都提高了。参见 Huizinga (1989)同类问题的其他例子。

### 第 2.3 节

2.10 下图所示的同时行动博弈重复进行两次,并且第二阶段开始前双方均可观测到第一阶段的结果,不考虑贴现因素。变量 $x$ 大于 4,因而 (4,4)在一次性博弈中并不是一个均衡收益。对什么样的 $x$,(双方参与者同时采取)下述战略是一个子博弈精炼纳什均衡?

第一阶段选择 $Q_i$,如果第一阶段的结果为$(Q_1, Q_2)$,在第二阶段选择 $P_i$;如果第一阶段的结果为$(y, Q_2)$,其中 $y \neq Q_1$,第二阶段选择 $R_i$;如果第一阶段的结果为$(Q_1, z)$,其中 $z \neq Q_2$,第二阶段选择 $S_i$;如果第一阶段结果为$(y, z)$,其中 $y \neq Q_1$ 且 $z \neq Q_2$,则在第二阶段选择 $P_i$。

| | $P_2$ | $Q_2$ | $R_2$ | $S_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 2,2 | $x$,0 | −1,0 | 0,0 |
| $Q_1$ | 0,$x$ | 4,4 | −1,0 | 0,0 |
| $R_1$ | 0,0 | 0,0 | 0,2 | 0,0 |
| $S_1$ | 0,−1 | 0,−1 | −1,−1 | 2,0 |

2.11 下图的同时行动博弈重复进行两次，第二阶段开始前参与双方可以观测到第一阶段的结果。不考虑贴现因素。在一个纯战略子博弈精炼纳什均衡中，能否在第一阶段达到(4,4)的收益？如果可以，给出相应的战略。如果不能，证明为什么。

| | $L$ | $C$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | 3,1 | 0,0 | 5,0 |
| $M$ | 2,1 | 1,2 | 3,1 |
| $B$ | 1,2 | 0,1 | 4,4 |

2.12 何为一个重复博弈的战略？何为重复博弈的子博弈？何为子博弈精炼纳什均衡？

2.13 回顾习题 1.7 中静态贝特兰德双头垄断模型(同类产品)：企业同时给产品定价；对企业 $i$ 产品的需求，如果 $p_i < p_j$，为 $a - p_i$；如果 $p_i > p_j$，为 0；如果 $p_i = p_j$，则为 $(a - p_i)/2$；边际成本为 $c < a$。考虑基于上述阶段博弈的无限重复博弈。证明在一个子博弈精炼纳什均衡中，当且仅当 $\delta > 1/2$ 时，企业可以使用触发战略(只要发生任何背离，就永远转向阶段博弈的纳什均衡)以维持垄断条件下的价格水平。

2.14 假设在习题 2.13 中的无限重复贝特兰德博弈中的需求随机波动：在每一阶段，需求函数的截距是 $a_H$ 的概率为 $\pi$；是 $a_L(a_L < a_H)$ 的概率为 $1-\pi$；不同阶段间的需求相互独立。假设每一阶段两企业在选择当期价格之前都可以观测到本期的需求水平。两种需求水平下的垄断价格($p_H$ 和 $p_L$)分别是多少？

解出 $\delta^*$，使得在子博弈精炼纳什均衡中，两企业能够采用触发战略维持上述垄断价格水平(即对 $i = H, L$，需求为 $a_i$ 时选择价格 $p_i$)的最小贴现因子 $\delta$ 的值。并对处于 1/2 和 $\delta^*$ 之间的所有 $\delta$，求出最高价格 $p(\delta)$，使得在子博弈精炼纳什均衡中，企业可通过运用触发战略，在高需求水平时维持价格 $p(\delta)$，在低需求水平时维持价格 $p_L$。(参见罗滕贝格和萨隆纳，

1986)

2.15 假设在一个古诺寡头垄断中有 $n$ 个企业。反需求函数由 $P(Q)=a-Q$ 给出,其中 $Q=q_1+\cdots+q_n$。考虑基于这一阶段博弈的无限重复博弈。求出最小的 $\delta$ 值,使得在子博弈精炼纳什均衡中企业能够运用触发战略维持垄断产出水平。这一结果随 $n$ 的变化将如何变化? 为什么? 如果 $\delta$ 非常之小,以致企业无法通过采用触发战略来维持垄断产出,求出能够通过触发战略维持住的、使利润最大化的相应的子博弈精炼纳什均衡。

2.16 在第2.1.C节分析的工资和就业模型中,逆向归纳解对社会来讲并不是有效率的。并且在实践中,企业和工会今天就一个3年期合同的条款进行谈判,并将在3年以后再就下一期的合同条款进行谈判,如此等等。从而,两者之间的关系用重复博弈来表示可能更为准确,参见(埃斯皮诺萨和里,1989)。

这个问题可导出在无限重复博弈中子博弈精炼纳什均衡帕累托优于一次性博弈中逆向归纳解的条件。分别用 $U^*$ 和 $\pi^*$ 表示一次性博弈逆向归纳解中工会效用和企业利润。考虑另外的一个工资——就业组合 $(w, L)$ 以及与之相应的效用——利润组合 $(U, \pi)$,假设双方的贴现因子都是 $\delta$(每3年为一个阶段),请推导 $(w, L)$ 应满足的条件,使得(1) $(U, \pi)$ 帕累托优于 $(U^*, \pi^*)$ 且(2) $(U, \pi)$ 为无限重复博弈的一个子博弈精炼纳什均衡的结果,其中只要发生任何偏离就将永远转向 $(U^*, \pi^*)$。

2.17 考虑如下的一家企业和一系列工人之间的无限期博弈,每名工人只出现在一个阶段。在每一阶段工人选择努力工作,这时努力成本为 $c$,生产的产出为 $y$;或不做任何努力,也没有任何产出,不发生任何成本。如果生产出了产出,企业拥有成果但可以通过支付工资的方式与工人分享,具体方法将在后面提到。假定在一个阶段的开始工人可选择另外的就业机会,(减去努力成本的)净价值为0,并且工人不能被强迫接受一个小于0的工资。同时假定 $y>c$,从而努力工作是有效率的。

在每一阶段内,博弈进行的时间顺序如下:首先工人选择一个努力水平,然后企业和工人都可以观察到产出的情况,最后企业选择支付给工人的工资水平。假定事先不能达成任何有约束力的工资协议:企业选择的工资是完全不受限制的。那么,在单一阶段的博弈中,子博弈精炼意味着无论工人的产出如何,企业给出的工资都为0,于是工人也不会进行任何努力。

现在考虑无限期时的情况,我们已提到每个工人只出现在一个阶段。不过我们可以假定在阶段 $t$ 的开始,博弈前面 $t-1$ 个阶段的进行过程都可

被将在 $t$ 阶段工作的工人观测到(可以想象到,这些知识在工人之间代代相传)。假设企业未来收益每一阶段的贴现因子为 $\delta$。写出无限期博弈中一个子博弈精炼均衡下企业和每个工人的战略,使得对足够大的贴现因子 $\delta$,在均衡情况下,每个工人都努力工作,生产出产出 $y$,并给出上述均衡存在的充分必要条件。

**第 2.4 节**

2.18 对一个任意的博弈,解释其战略、信息集以及子博弈的概念。

2.19 在第 2.1.D 节分析的三阶段鲁宾斯坦讨价还价模型中,我们解出了逆向归纳解。它的子博弈精炼纳什均衡是什么?

2.20 在无限期鲁宾斯坦讨价还价模型中考虑下面的战略(注意习惯性的表示方法,开价 $(s,1-s)$ 意味着参与者 1 将会得到 $s$,参与者 2 将得到 $1-s$,而不论是哪一方提出的条件):令 $s^*=1/(1+\delta)$,参与者 1 坚持开价 $(s^*,1-s^*)$,并且只有当 $s\geqslant\delta\cdot s^*$ 时,才接受对方开价 $(s,1-s)$;参与者 2 坚持开价 $(1-s^*,s^*)$,并且只有当 $1-s\geqslant\delta\cdot s^*$ 时才接受对方开价 $(s,1-s)$。证明这两个战略是一个纳什均衡,并证明这一均衡是子博弈精炼的。

2.21 给出第 2.1 节描述的手雷博弈的扩展式表述及标准式表述。并分别写出其纯战略纳什均衡、逆向归纳解和子博弈精炼纳什均衡。

2.22 给出第 2.2.B 节讨论的银行挤提博弈的扩展式表述及标准式表述。其纯战略子博弈精炼纳什均衡是什么?

2.23 一个卖方和一个买方打算进行交易。在他们交易之前,买方可以作一项投资,从而提高标的物对他的价值。这项投资不能被卖方观察到,从而也不会影响标的物对卖方的价值,后者我们标准化为 0(举一个例子,设想一家企业购买另一企业,在兼并前的一段时间,兼并方可以采取措施,改变其计划推出的产品,以使之在兼并后与被兼并方的生产相配合。如果产品开发需要相当长时间,而产品生命周期又比较短,兼并之后兼并方已没有充足的时间进行此项投资了)。购买方对标的的初始价值为 $v>0$;一项投资 $I$ 使得购买方的价值变为 $v+I$,但相应增加了成本 $I^2$。博弈进行的时间顺序如下:首先,购买方选择投资水平 $I$,发生成本 $I^2$;第二,卖方不能观测到 $I$,但开出标的的卖价为 $p$;第三,买方或者接受,或者拒绝卖方的开价:如果买方接受,则买方的收益为 $v+I-p-I^2$,卖方的收益为 $p$;如果拒绝,则双方的收益分别为 $-I^2$ 和 0。证明这一博弈不存在纯战略子博弈精炼纳什均衡。解出博弈的混合战略纳什均衡,其中买方的混合战略中,出现概率为正的只有两种投资水平,并且卖方的混合战略中,出现概率为正的只

有两个价格水平。

## 2.7 参考文献

Abreu, D. 1986. "Extremal Equilibria of Oligopolistic Supergames." *Journal of Economic Theory* 39:191—225.

——. 1988. "On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting." *Econometrica* 56:383—96.

Abreu, D., D. Pearce, and E. Stacchetti. 1986. "Optimal Cartel Equilibria with Imperfect Monitoring." *Journal of Economic Theory* 39:251—69.

Admati, A., and M. Perry. 1991. "Joint Projects without Commitment." *Review of Economic Studies* 58:259—76.

Akerlof, G., and J. Yellen, eds. 1986. *Efficiency Wage Models of the Labor Market*. Cambridge, England: Cambrige University Press.

Ball, L. 1990. "Time-Consistent Policy and Persistent Changes in Inflation." National Bureau of Economic Research Working Paper # 3529 (December).

Barro, R., and D. Gordon. 1983 "Rules, Discretion, and Reputation in a Model of Monetary Policy." *Journal of Monetary Economics* 12:101—21.

Becker, G. 1974. "A Theory of Social Interactions." *Journal of Political Economy* 82:1063—93.

Benoit, J-P., and V. Krishna. 1985. "Finitely Repeated Games." *Econometrica* 53:905—22.

——. 1989. "Renegotiation in Finitely Repeated Games." Harvard Business School Working Paper #89—004.

*Buchanan, J.* 1975. "The Samaritan's Dilemma." *In Altruism, Morality, and Economic Theory*, E. Phelps, ed. New York: Russell Sage Foundation.

Bulow, J., and K. Rogoff. 1989. "Sovereign Debt: Is to Forgive to Foget?" *American Economic Review* 79:43—50.

Diamond, D., and P. Dybvig. 1983. "Bank Runs, Deposit Insurance,

and Liquidity." *Journal of Political Economy* 91:401—19.

Espinosa, M., and C. Rhee. 1989. "Efficient Wage Bargaining as a Repeated Games." *Quarterly Journal of Economics* 104:565—88.

Farrell, J., and E. Maskin. 1989. "Renegotiation in Repeated Games." *Games and Economic Behavior* 1:327—60.

Fernandez, R., and J. Glazer. 1991. "Striking for a Bargain Between Two Completely Informed Agents." *American Economic Review* 81:240—52.

Friedman, J. 1971. "A Non-cooperative Equilibrium for Supergames." *Review of Economic Studies* 38:1—12.

Fudenberg, D., and E. Maskin. 1986. "The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting and Incomplete Information." *Econometrica* 54:533—54.

Green, E., and R. Porter. 1984. "Noncooperative Collusion Under Imperfect Price Information." *Econometrica* 52:87—100.

Huizinga, H. 1989. "Union Wage Bargaining and Industry Structure." Stanford University, Mimeo.

Jacklin, C., and S. Bhattacharya. 1988. "Distinguishing Panics and Information－based Bank Runs: Welfare and Policy Implications." *Journal of Political Economy* 96:568—92.

*Kreps*, D. 1990. *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Kreps, D., and R. Wilson. 1982 "Sequential Equilibrium." *Econometrica* 50:863—94.

Lazear, E. 1989. "Pay Equality and Industrial Politics." *Journal of Political Economy* 97:561—80.

Lazear, E., and S. Rosen. 1981. "Rank-Order Tournaments as Optimum Labor Contracts." *Journal of Political Economy* 89:841—64.

Leontief, W. 1946. "The Pure Theory of the Guaranteed Annual Wage Contract." *Journal of Political Economy* 54:76—79.

McMillan, J. 1986. *Game Theory in International Economics*. Chur, Switzerland: Harwood Academic Publishers.

Osborne, M., and A. Rubinstein. 1990. *Bargaining and Markets*. San Diego: Academic Press.

Prendergast, C. 1992. "The Role of Promotion in Inducing Specific Human Capital Acquisition." Forthcoming in *Quarterly Journal of Economics*.

Rosen, S. 1986. "Prizes and Incentives in Elimination Tournaments." *American Economic Review* 76:701—15.

Rotemberg, J., and G. Saloner. 1986. "A Supergame-Theoretic Model of Business Cycles and Price Wars during Booms." *American Economic Review* 76:390—407.

Rubinstein, A. 1982. "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model." *Econometrica* 50:97—109.

Selten, R. 1965. "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit." *Zeitschrift fur Gesamte Staatswissenschaft* 121: 301—24.

Shaked, A., and J. Sutton. 1984. "Involuntary Unemployment as a Perfect Equilibrium in a Bargaining Model." *Econometrica* 52:1351—64.

Shapiro, C., and J. Stiglitz. 1984. "Equilibrium Unemployment as a Discipline Device." *American Economic Review* 74:433—44.

Sobel, J., and I. Takahashi. 1983. "A Multistage Model of Bargaining." *Review of Economic Studies* 50:411—26.

Stackelberg, H. von 1934. *Marktform und Gleichgewicht*. Vienna: Julius Springer.

Staiger, D. 1991. "Why Do Union Contracts Exclude Employment?" Stanford University, Mimeo.

Tirole, J. 1988. *The Theory of Industrail Organization*. Cambridge: MIT Press.

# 第 3 章

# 非完全信息静态博弈

从本章开始，我们研究非完全信息博弈，有时也称为贝叶斯博弈。前面讲过，在一个完全信息博弈中，参与者的收益函数是共同知识；而在非完全信息博弈中，与之相反，至少有一个参与者不能确定另一参与者的收益函数。非完全信息静态博弈的一个常见例子是密封报价拍卖(sealed-bid auction)：每一报价方知道自己对所售商品的估价，但不知道任何其他报价方对商品的估价；各方的报价放在密封的信封里上交，从而参与者的行动可以被看作是同时的。不过，绝大多数在经济领域非常有意思的贝叶斯博弈是动态的。我们在第 4 章将会看到，私人信息的存在十分自然地导致享有私人信息的一方试图去沟通(或者误导)，同时也使得没有私人信息的一方试图去学习和反应。这些都是博弈中固有的动态因素。

第 3.1 节给出静态贝叶斯博弈的标准式表述和贝叶斯纳什均衡的定义。由于这些定义非常抽象并有些复杂，我们通过一个简单的例子——非对称信息下的古诺竞争——介绍主要思想。

第 3.2 节讨论三个应用的例子。第一，我们就第 1 章中给出的对混合战略的解释进行正式讨论：即参与者 $j$ 的混合战略代表了 $I$ 对 $j$ 所选择纯战略的不确定性，并且 $j$ 的选择基于他所掌握的一小点儿私人信息。第二，我们分析一个密封报价拍卖的例子，其中竞买方的估价是私人信息，但是卖方对商品的估价却为各方所周知。最后，我们考虑买方和卖方各自都掌握一定私人信息的情况(如在企业中，企业了解工人的边际产出，工人则知道自己的机会成本)。我们分析一个称为双向拍卖的交易博弈：卖方开出一个卖价，同时由买方给出一个买价；如果后者大于前者，则以两个价格的平均值成交。

第 3.3 节我们给出并证明显示原理(Revelation Principle)，并简要讨论其在存在私人信息时的博弈设计方面的应用。

# 3.1 理论:静态贝叶斯博弈和贝叶斯纳什均衡

## 3.1.A 一个例子:非对称信息下的古诺竞争

考虑如下的古诺双头模型。其中市场反需求函数由 $P(Q)=a-Q$ 给出,这里 $Q=q_1+q_2$ 为市场中的总产量。企业 1 的成本函数为 $C_1(q_1)=cq_1$,不过企业 2 的成本函数以 $\theta$ 的概率为 $C_2(q_2)=c_Hq_2$,以 $1-\theta$ 的概率为 $C_2(q_2)=c_Lq_2$,这里 $c_L<c_H$。并且信息是不对称的:企业 2 知道自己的成本函数和企业 1 的成本函数,企业 1 知道自己的成本函数,但却只知道企业 2 边际成本为 $c_H$ 的概率是 $\theta$,边际成本为 $c_L$ 的概率是 $1-\theta$(企业 2 可能是新进入这一行业的企业,也可能刚刚发明一项新的生产技术)。上述一切都是共同知识:企业 1 知道企业 2 享有信息优势,企业 2 知道企业 1 知道自己的信息优势,如此等等。

自然地,企业 2 的边际成本较高时和较低时,它希望生产的产出水平是不同的(一般而言,前一种情况时的产出要更低一些)。企业 1 从自己的角度,也会预测到企业 2 根据其成本情况将选择不同的产量。用 $q_2^*(c_H)$ 和 $q_2^*(c_L)$ 分别把企业 2 的产量选择表示为成本的函数,并令 $q_1^*$ 表示企业 1 的单一产量选择。如果企业 2 的成本较高,它会选择 $q_2^*(c_H)$ 满足:

$$\max_{q_2}[(a-q_1^*-q_2)-c_H]q_2 .$$

类似地,如果企业 2 的成本较低,$q_2^*(c_L)$ 应满足下式

$$\max_{q_2}[(a-q_1^*-q_2)-c_L]q_2 .$$

最后,企业 1 知道企业 2 成本较高的概率为 $\theta$,并应该能预测到企业 2 的产量选择将分别为 $q_2^*(c_H)$ 或 $q_2^*(c_L)$。从而,企业 1 选择满足下式的 $q_1^*$

$$\max_{q_1}\theta[(a-q_1-q_2^*(c_H))-c]q_1+(1-\theta)[(a-q_1-q_2^*(c_L))-c]q_1$$

以使期望的利润最大化。

上面三个最优化问题的一阶条件为

$$q_2^*(c_H)=\frac{a-q_1^*-c_H}{2}, \qquad q_2^*(c_L)=\frac{a-q_1^*-c_L}{2},$$

及

$$q_1^*=\frac{\theta[a-q_2^*(c_H)-c]+(1-\theta)[a-q_1^*(c_L)-c]}{2} .$$

假定这些一阶条件可以决定上述最优化问题的解(请回顾习题 1.6,在完全信息古诺双头博弈中,如果企业间的成本差别足够大,则在均衡情况下,高成本企业没有任何产出。作为一项练习,求出这里不会出现类似问题的充分条件)。

三个一阶条件构成的方程组的解为

$$q_2^*(c_H)=\frac{a-2c_H+c}{3}+\frac{1-\theta}{6}(c_H-c_L),$$

$$q_2^*(c_L)=\frac{a-2c_L+c}{3}-\frac{\theta}{6}(c_H-c_L),$$

及

$$q_1^*=\frac{a-2c+\theta c_H+(1-\theta)c_L}{3}.$$

把这里的 $q_2^*(c_H)$、$q_2^*(c_L)$和 $q_1^*$ 与成本分别为 $c_1$ 和 $c_2$ 的完全信息古诺均衡相比较,假定 $c_1$、$c_2$ 的取值可使得两个企业的均衡产量都为正,在完全信息的条件下,企业 1 的产出为 $q_1^*=(a-2c_i+c_j)/3$。然而与之不同的,在非完全信息条件下,$q_2^*(c_H)$要高于$(a-2c_H+c)/3$,$q_2^*(c_L)$却低于$(a-2c_L+c)/3$。之所以会出现这种情况,是因为企业 2 不仅根据自己的成本调整其产出,同时还将考虑到企业 1 的情况选择最优反应。例如,如果企业 2 的成本较高,它就会因成本较高而减少产量,但同时又会生产稍多一些,因为它知道企业 1 将根据期望利润最大化的原则决定产出,从而要低于企业 1 确知企业 2 成本较高时的产量。(这一例子可能会引起误解的地方,是 $q_1^*$ 恰好等于企业 1 在相应的两个完全信息博弈中古诺产量的期望值。一般情况下这一点是不成立的,例如可以考虑企业 $i$ 的总成本为$c_iq_i^2$ 的情况。)

### 3.1.B 静态贝叶斯博弈的标准式表述

前面已讲过一个完全信息 $n$ 人博弈的标准式表述为$G=\{S_1,\cdots,S_n;u_1,\cdots,u_n\}$,其中 $S_1$ 为参与者 $i$ 的战略空间,$u_i(s_1,\cdots,s_n)$为所有参与者分别选择战略$(s_1,\cdots,s_n)$时参与者 $i$ 的收益。不过,根据第 2.3.B 节的讨论,在同时行动的全信息博弈中,参与者的一个战略就是一个简单的行动,于是我们又可以写为 $G=\{A_1,\cdots,A_n;u_1,\cdots,u_n\}$,其中 $A_i$ 为参与者 $i$ 的行动空间,$u_i(a_1,\cdots,a_n)$为在所有参与者分别选择行动$(a_1,\cdots,a_n)$时参与者 $i$ 的收益。为了给下面描述非完全信息静态博弈的时间顺序作准备,我们先把一个完全信息静态博弈的时间顺序描述如下:(1)参与者同时选择行动

(参与者 $i$ 从可行集 $A_i$ 中选择 $a_i$)，然后(2)参与者 $i$ 得到收益 $u_i(a_i, \cdots, a_n)$。

现在，我们要建立非完全信息同时行动博弈的标准式表述，也称为静态贝叶斯博弈。首先要表示出非完全信息的关键因素，即每一参与者知道他自己的收益函数，但也许不能确知其他参与者的收益函数。令参与者 $i$ 可能的收益函数表示为 $u_i(a_1, \cdots, a_n; t_i)$，其中 $t_i$ 称为参与者 $i$ 的类型(type)，它属于一个可能的类型集(亦称为类型空间(type space)) $T_i$，每一类型 $t_i$ 都对应着参与者 $i$ 不同的收益函数的可能情况。

举一个抽象的例子。假设参与者 $i$ 有两种可能的收益函数，我们也可以说参与者 $i$ 有两种类型，$t_i$ 和 $t_2$，参与者 $i$ 的类型空间为 $T_i=\{t_{i1}, t_{i2}\}$，并且参与者 $i$ 的两种收益函数分别为 $u_i(a_1, \cdots, a_n; t_{i1})$ 和 $(u_i(a_1, \cdots, a_n; t_{i2})$。我们可以用参与者的每一类型都对应着该参与者不同收益函数的可能情况这一思路，来表示参与者有不同可行行动集时的情况，具体方法如下。例如，假设参与者 $i$ 的可行行动集是 $\{a, b\}$ 的概率为 $q$，是 $\{a, b, c\}$ 的概率为 $1-q$，于是我们可以说 $i$ 有两种类型($t_{i1}$ 和 $t_{i2}$，其中 $t_{i1}$ 的概率为 $q$)，并且对两种类型我们都可以认为其可行的行动集是 $\{a, b, c\}$，只是对类型 $t_{i1}$ 定义其选择行动 $c$ 的收益为 $-\infty$。

作为更为具体的例子，考虑前一节里的古诺博弈。企业的行动是它们的产量选择 $q_1$ 和 $q_2$。企业2有两种可能的成本函数，从而有两种可能的利润或收益函数：

$$\pi_2(q_1, q_2; c_L)=[(a-q_1-q_2)-c_L]q_2$$

和

$$\pi_2(q_1, q_2; c_H)=[(a-q_1-q_2)-c_H]q_2 .$$

企业1只有一种可能的收益函数：

$$\pi_1(q_1, q_2; c)=[(a-q_1-q_2)-c]q_1 .$$

我们说企业2的类型空间为 $T_2=\{c_L, c_H\}$，企业1的类型空间为 $T_i=\{c\}$。

在这样定义参与者的类型之后，说参与者 $i$ 知道自己的收益函数也就等同于说参与者 $i$ 知道自己的类型，类似地，说参与者 $i$ 可能不确定其他参与者的收益函数，也就等同于说参与者 $i$ 不能确定其他参与者的类型，我们用 $t_{-i}=\{t_1, \cdots, t_{i-1}, t_{i+1}, \cdots, t_n\}$ 表示。并用 $T_{-i}$ 表示 $t_{-i}$ 所有可能的值的集合，用概率 $p_i(t_{-i} \mid t_i)$ 表示参与者在知道自己的类型是 $t_i$ 的前提下，对其他参与者类型(即 $t_{-i}$)的推断(belief)。在第3.2节分析的所有应用中(以及绝大多数文献中)，参与者之间的类型是相互独立的，这种情况下 $p_i$

$(t_{-i}|t_i)$与 $t_i$ 不相关，于是我们可以把参与者的推断写成 $P_1,\cdots P_n$。但是也存在参与者之间类型相关的情况，所以在给定静态贝叶斯博弈的定义时，我们考虑到这种情况，仍把参与者的推断写为 $p_i(t_{-i}|t_i)$。[①]

在我们已熟悉的完全静态贝叶斯博弈的标准式表述中加上类型和推断这两个新概念，就可得到静态贝叶斯博弈的标准式表述。

**定义** 一个 $n$ 人静态贝叶斯博弈的标准式表述包括：参与者的行动空间 $A_1,\cdots A_n$，它们的类型空间 $T_1,\cdots T_n$，他们的推断 $p_1,\cdots p_n$ 以及他们的收益函数 $u_1,\cdots u_n$。参与者 $i$ 的类型作为参与者 $i$ 的私人信息，决定了参与者 $i$ 的收益函数，$u_i(a_1,\cdots a_n;t_i)$并且是可能的类型集 $T_i$ 中的一个元素。参与者 $i$ 的推断 $p_i(t_{-i}|t_i)$描述了 $i$ 在给定自己的类型 $t_i$ 时，对其他 $n-1$ 个参与者可能的类型 $t_{-i}$的不确定性。我们用 $G=\{A_1,\cdots,A_n;T_1,\cdots,T_n;p_1,\cdots p_n;u_1,\cdots,u_n\}$表示这一博弈。

根据豪尔绍尼(1967)的假定，静态贝叶斯博弈的时间顺序如下：(1)自然赋予博弈各方的类型向量 $t=(t_1,\cdots,t_n)$，其中 $t_i$ 属于可行集合 $T_i$；(2)自然告知参与者 $i$ 自己的类型 $t_i$，却不告诉其他参与者的类型；(3)参与者同时选择行动，每一参与者 $i$ 从可行集 $A_i$ 中选择 $a_i$；(4)各方得到收益 $u_i(a_i,\cdots a_n;t_i)$。借助于第一步和第二步中虚构的参与者“自然”的行动，我们可以把一个非完全信息的博弈表述为一个非完美信息的博弈，其中非完美信息的含义(参见第2章)为在博弈的某些行动中，行动方不知道这以前的博弈进行的整个过程。这里，因为在第二步自然告知了参与者 $i$ 自己的类型，却没有告知参与者 $j$，在第三阶段参与者 $j$ 选择行动时，$j$ 就不知道整个的博弈进行过程。

在讨论静态贝叶斯博弈的标准式表述的最后，还要提到两个技术性较强的问题。第一，在有的博弈中，参与者 $i$ 不仅对他自己的收益函数掌握私人信息，还享有其他参与者收益函数的私人信息。例如在习题3.2中，对第3.1.A节非对称信息古诺模型加以修改，使两企业成本情况完全一致，但一个企业掌握市场需求水平，另一企业却不清楚。由于需求水平可以影响两

① 设想有两个企业正比赛开发一项新的技术。每一企业成功的机会部分依赖于此项技术的难度，这一点是未知的。每一企业只知道自己是否已经成功，而不知道另一企业进展如何。不过，如果企业1成功了，则此项技术的难度可能不太大，企业2同样已经成功的可能性较大。那么，企业1对企业2类型的推断是依赖于企业1对自己类型的知识。

个企业的收益函数,知道市场需求的企业的类型也就进入了另一企业的收益函数。在 $n$ 个参与者的博弈中,我们允许参与者 $i$ 的收益不仅决定于行动组合 $(a_1, \cdots, a_n)$,还决定于所有的类型 $(t_1, \cdots, t_n)$,从而包含了这一可能情况,并据此把收益函数表示为 $u_i(a_1, \cdots, a_n, t_1, \cdots, t_n)$。

第二个技术性问题涉及到推断 $p_i(t_{-i} | t_i)$。我们将假定在静态贝叶斯博弈时间顺序的第一步,即自然根据先验的概率分布 $p(t)$ 赋予各参与者类型向量 $t = (t_1, \cdots, t_n)$,是共同知识。当随后自然告知参与者 $i$ 的类型 $t_i$ 时,他可以根据贝叶斯法则计算其他参与者类型的条件概率,得出推断 $p_i(t_{-i} | t_i)$[①]

$$p_i(t_{-i} | t_i) = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i}, t_i)}.$$

而且,另外参与者根据 $i$ 的类型,也能够计算参与者 $i$ 持有的不同推断,即对 $T_i$ 中的每一个 $t_i$,都可计算出 $p_i(t_{-i} | t_i)$。前面已经提到,我们将经常假定参与者的类型是相互独立的,这时 $p_i(t_{-i})$ 不再依赖于 $t_i$,但仍得自先验分布 $p(t)$,这种情况下,其他参与者知道参与者 $i$ 对他们类型所持有的推断。

### 3.1.C 贝叶斯纳什均衡的定义

本节我们定义静态贝叶斯博弈的一个均衡概念。为此,必须首先定义此类博弈中参与者的战略空间。第2.3.B和第2.4.B节已经讲过,参与者的一个战略是关于行动的一个完整计划,包括了参与者在可能会遇到的每一种情况下将选择的可行行动。在给定的静态贝叶斯博弈的时间顺序中,自然首先行动,赋予每一参与者各自的类型,参与者 $i$ 的一个(纯)战略必须包括参与者 $i$ 在每一可行的类型下选择的一个可行行动。

**定义** 在静态贝叶斯博弈 $G = \{A_1, \cdots, A_n, T_1, \cdots, T_n; p_1, \cdots, p_n; u_1, \cdots u_n\}$ 中,参与者 $i$ 的一个战略是一个函数 $s_i(t_i)$,其中对 $T_i$ 中的每一类型 $t_i$, $s_i(t_i)$ 包含了自然赋予 $i$ 的类型为 $t_i$ 时, $i$ 将从可行集 $A_i$ 中选择的

---

① 贝叶斯法则提供了 $P(A|B)$ 的计算公式,即事件B已经发生后,事件A将会发生的(条件)概率。令 $P(A)$、$P(B)$ 及 $P(A,B)$ 分别表示A将发生,B将发生,A、B都将发生的(先验)概率(即不论A还是B都没有机会发生之前的概率),贝叶斯法则给出的条件概率公式为 $P(A|B) = P(A,B)/P(B)$,也就是说,给定B发生,A发生的条件概率等于A和B同时发生的概率除以B发生的先验概率。

行动。

不同于(静态及动态的)完全信息博弈,在贝叶斯博弈的标准式表述中没有给出参与者的战略空间。作为替代,在静态贝叶斯博弈中战略空间可从类型空间与行动空间中构建:参与者 $i$ 的可行的(纯)战略集 $S_i$ 是定义域为 $T_i$,值域为 $A_i$ 的所有可能的函数集。例如一个分离战略(separating strategy),$T_i$ 中的每一类型 $t_i$ 都选择 $A_i$ 中的不同行动 $a_i$;而在混同战略(pooling strategy)中,所有的类型都选择同一行动,分离战略和混同战略的这种区别在第4章讨论非完全信息动态博弈时十分重要,在这里提到这两个概念的区分,只是帮助说明从给定的类型空间 $T_i$ 和行动空间 $A_i$ 中,可以构建出多么宽泛而又差异巨大的战略。

也许有人认为,要求参与者 $i$ 的战略包含参与者 $i$ 每一种可能类型下的可行行动没有必要,毕竟,一旦自然赋予某参与者一特定类型并告知他,参与者就不必再关心如果自然赋予他的是另外一种类型他将如何行动了。但另一方面,参与者 $i$ 还需要考虑另外的参与者将如何行动,而且另外参与者的行动又决定于他们对参与者 $i$ 为 $T_i$ 中每一类型 $t_i$ 时,$i$ 的行动的推断。从而,在被赋予某种类型之后要决定如何行动,参与者 $i$ 仍必须考虑如果他被赋予 $T_i$ 中另外每一 $t_i$ 时应该如何行动。

作为例子,考虑第3.1.A节中的非对称信息古诺博弈,我们已经说明博弈的解由三个产量选择组成:$q_2^*(c_H)$,$q_2^*(c_L)$及 $q_1^*$。用刚刚给出的关于战略的定义,$(q_2^*(c_H), q_2^*(c_L))$就是企业2的战略,$q_1^*$ 是企业1的战略,很容易想到企业2根据自己的成本情况会选择不同的产量,但是还应注意到的同样重要的一点,是企业1在选择单一的产出时也应同样考虑企业2将根据不同的成本选择不同的产量。从而,如果我们的均衡概念要求企业1的战略是企业2战略的最优反应,则2的战略必须是一对产量,分别对应于两种可能的成本类型,否则企业1就无法计算它的战略是否确实是企业2战略的最优反应。

更为一般地讲,如果我们允许一个参与者的战略不包括自然赋予他其他类型时该参与者将选择的行动,我们就无法把纳什均衡的概念运用到贝叶斯博弈。这一结论和第2章的一个结论是一致的:在完全信息动态博弈中,看似没有必要要求参与者 $i$ 的战略包含参与者 $i$ 在可能会遇到的所有情况下的行动选择,但如果我们允许参与者的一个战略不包含某些可能遇到的情况下的行动选择,我们就无法把纳什均衡的概念运用于完全信息动态博弈。

给出贝叶斯博弈中关于战略的定义之后,我们就可以定义贝叶斯纳什均衡了。尽管定义中的符号十分复杂,但中心思路却既简单又熟悉:每一参与者的战略必须是其他参与者战略的最优反应,亦即贝叶斯纳什均衡实际上就是在贝叶斯博弈中的纳什均衡。

**定义** 在静态贝叶斯博弈 $G=\{A_1,\cdots,A_n;T_1,\cdots,T_n;p_1,\cdots,p_n;u_1,\cdots u_n\}$中,战略组合 $s^*=(s_1^*,\cdots,s_n^*)$是一个纯战略贝叶斯纳什均衡,如果对每一参与者 $i$ 及对 $i$ 的类型集 $T_i$ 中的每一$t_i$, $s_i^*(t_i)$满足

$$\max_{a_i\in A_i}\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} u_i(s_i^*(t_1),\cdots,s_{i-1}^*(t_{i-1}),a_i,s_{i+1}^*(t_{i+1}),\cdots,s_n^*(t_n);t)\, p_i(t_{-i}\mid t_i)\ .$$

亦即,没有参与者愿意改变自己的战略,即使这种改变只涉及一种类型下的一个行动。

一个有限的静态贝叶斯博弈(即博弈中 n 是有限的,并且$(A_1,\cdots,A_n)$和$(T_1,\cdots,T_n)$都是有限集)存在贝叶斯纳什均衡,也许包含了混合战略,它的证明十分容易。证明过程与完全信息下有限博弈中混合战略纳什均衡存在性的证明基本一致,本书略去。

## 3.2 应用举例

### 3.2.A 再谈混合战略

我们在第1.3.A节已提到,豪尔绍尼(1973)提出参与者 $j$ 的混合战略代表了参与者$i$ 对$j$ 所选择的纯战略的不确定性,而 $j$ 的选择又依赖于他所掌握的一小点儿私人信息。现在,我们可以给出这种观点的精确表述:完全信息博弈的混合战略纳什均衡(几乎总是)可以解释为与之密切相关、存在一小点非完全信息的博弈中的纯战略贝叶斯纳什均衡(我们忽略不能够由此解释的极为罕见的情况)。用更容易理解的话讲,混合战略纳什均衡的重要特征,不是参与者 $j$ 随机地选择一个战略,而是参与者 $i$ 不能确定$j$ 的选择,这种不确定性既可产生于随机因素,又可能(更为合理地)因为一小点儿私人信息,如下面的例子。

回顾第1章所讲的性别战博弈,存在两个纯战略纳什均衡(歌剧,歌剧)

和(拳击,拳击)及一个混合战略纳什均衡,其中克里斯以 2/3 的概率选择歌剧,帕特以 2/3 的概率选择拳击。

帕特

| 克里斯 | | 歌剧 | 拳击 |
|---|---|---|---|
| | 歌剧 | 2,1 | 0,0 |
| | 拳击 | 0,0 | 1,2 |

性别战

现在假设尽管两人已经认识了相当一段时间,但克里斯和帕特仍不能确定对方收益函数的情况。具体地说,假定如果双方都选择歌剧克里斯的收益为 $2+t_c$,其中 $t_c$ 的值是克里斯的私人信息,双方都去观看拳击时帕特的收益为 $2+t_p$,其中 $t_p$ 的值为帕特的私人信息;$t_c$ 和 $t_p$ 相互独立,并服从 $[0,x]$ 区间上的均匀分布(至于选择 $[0,x]$ 区间的均匀分布并不重要,只要记住 $t_c$ 和 $t_p$ 的值是指原博弈收益的随机扰动项,我们可以认为 $x$ 是一个很小的正数)。所有其他情况下的收益不变。表述为标准式则为:静态贝叶斯博弈 $G=\{A_c,A_p,T_c,T_p,p_c,p_p,u_c,u_p\}$ 中,行动空间为 $A_c=A_p=\{$歌剧,拳击$\}$,类型空间为 $T_c=T_p=[0,x]$,关于类型的推断为对所有的 $t_c$ 和 $t_p$,$p_c(t_p)=p_p(t_c)=1/x$ 收益情况如下图。

帕特

| 克里斯 | | 歌剧 | 拳击 |
|---|---|---|---|
| | 歌剧 | $2+t_c,1$ | 0,0 |
| | 拳击 | 0,0 | $1,2+t_p$ |

非完全信息性别战

我们将构建出这一非完全信息性别战博弈的纯战略贝叶斯纳什均衡,其中克里斯在 $t_c$ 超过某临界值 $c$ 时选择歌剧,否则选择拳击;帕特在 $t_p$ 超过某临界值 $p$ 时选择拳击,否则选择歌剧。在这一均衡中,克里斯以 $(x-c)/x$ 的概率选择歌剧,帕特则以 $(x-p)/x$ 的概率选择拳击。我们将证明随非完全信息的逐渐消失(即随 $x$ 的值趋于 0),参与者在这一纯战略贝叶斯纳什均衡中的行为,逐渐与原博弈完全信息条件下混合战略纳什均衡中的行为相一致,也就是随 $x$ 的值趋于 0,$(x-c)/x$ 及 $(x-p)/x$ 都将趋于 2/3。

假设克里斯和帕特都采用上面所给出的战略，对一个给定的 $x$，我们计算相应的 $c$ 和 $p$，以使双方的战略符合贝叶斯纳什均衡的条件。给定帕特的战略，克里斯选择歌剧和选择拳击的期望收益分别为

$$\frac{p}{x}(2+t_c)+[1-\frac{p}{x}]\cdot 0=\frac{p}{x}(2+t_c)$$

与

$$\frac{p}{x}\cdot 0+[1-\frac{p}{x}]\cdot 1=1-\frac{p}{x}.$$

从而，当且仅当

$$t_c>\frac{x}{p}-3=c \tag{3.2.1}$$

时选择歌剧是最优的。相似地，给定克里斯的战略，帕特选择拳击和选择歌剧的期望收益分别为

$$[1-\frac{c}{x}]\cdot 0+\frac{c}{x}(2+t_p)=\frac{c}{x}(2+t_p)$$

与

$$[1-\frac{c}{x}]\cdot 1+\frac{c}{x}\cdot 0=1-\frac{c}{x}.$$

从而，当且仅当

$$t_p>\frac{x}{c}-3=p \tag{3.2.2}$$

时，选择拳击是最优的。

解(3.2.1)和(3.2.2)构成的方程组可得 $p=c$ 及 $p^2+3p-x=0$。解此二次方程，可得到克里斯选择歌剧的概率，即 $(x-c)/x$，以及帕特选择拳击的概率，即 $(x-p)/x$，都等于

$$1-\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2x},$$

当 $x$ 趋于0时，该式的值趋于2/3。也就是说，随非完全信息的消失，参与者在此非完全信息博弈纯战略贝叶斯纳什均衡下的行动趋于其在原完全信息博弈混合战略纳什均衡下的行动。

### 3.2.B 拍卖一种

考虑如下的价格优先密封拍卖(first-price, sealed-bid auction)。有两个投标人(bidder)，分别为1、2，投标人 $i$ 对商品的估价为 $v_i$——即如果投标人 $i$ 付出价格 $p$ 得到商品，则 $i$ 的收益为 $v_i-p$。两个投标人的估价相互

独立,并服从[0,1]区间上的均匀分布。投标价格不能为负,且双方同时给出各自的投标价。出价较高的一方得到商品,并支付他报的价格;另一方的收益和支付都为 0。在投标价相等的情况下,胜利方由掷硬币决定。投标方是风险中性的,所有以上都是共同信息。

为把这一问题化为标准式的静态贝叶斯博弈,我们必须确定行动空间、类型空间、推断及收益函数。参与者 $i$ 的行动是给出一个(非负的)投标价 $b_i$,其类型即他的估价 $v_i$(在抽象博弈 $G=\{A_1,A_2;T_1,T_2;p_1,p_2;u_1,u_2\}$ 中表示为,行动空间 $A_i=[0,\infty)$,类型空间 $T_i=[0,1]$)。由于估价是相互独立的,参与者 $i$ 推断 $v_j$ 服从[0,1]区间上的均匀分布,而不依赖于 $v_i$ 的值。最后,参与者 $i$ 的收益函数为

$$u_i(b_1,b_2;v_1,v_2)=\begin{cases} v_i - b_i & 当\ b_i>b_j\ , \\ (v_i-b_i)/2 & 当\ b_i=b_j\ , \\ 0 & 当\ b_i<b_j\ . \end{cases}$$

为推导这一博弈的贝叶斯纳什均衡,我们首先建立参与者的战略空间。前面已讲过,在静态贝叶斯博弈中,一个战略是由类型到行动的函数。从而,参与者 $i$ 的一个战略为函数 $b_i(v_i)$,据此可以决定 $i$ 在每一种类型(即对商品的估价)下选择的投标价格。在贝叶斯纳什均衡下,参与者 1 的战略 $b_1(v_1)$ 为参与者 2 的战略 $b_2(v_2)$ 的最优反应,反之亦然。正式地,战略组合 $(b(v_1),b(v_2))$ 是贝叶斯纳什均衡,如果对[0,1]中的每一 $v_i$,$b_i(v_i)$ 满足

$$\max_{b_i}(v_i-b_i)\text{Prob}\{b_i>b_j(v_j)\}+\frac{1}{2}(v_i-b_i)\text{Prob}\{b_i=b_j(v_j)\}\ .$$

我们假设该问题的一组线性均衡解 $b_1(v_1)=a_1+c_1v_1$ 及 $b_2(v_2)=a_2+c_2v_2$,并据此对上式进行简化。但应注意我们不是限制了参与者的战略空间,使之只包含了线性战略;而是允许参与者任意地选择战略,而只看是否存在线性的均衡解。我们会发现由于参与者的估价是均匀分布的,这样的线性均衡解不仅存在,而且是惟一的(为精确起见)。其结果为 $b_i(v_i)=v_i/2$,也就是说,每一参与者以其对商品估价的 1/2 作为投标价。这样,一个投标价格反映出投标方在拍卖中遇到的最基本的得失权衡:投标价格越高,中标的可能性越大;投标价格越低,一旦中标所得的收益就越大。

假设参与者 $j$ 采取战略 $b_j(v_j)=a_j+c_jv_j$,对一个给定的 $v_i$ 值,参与者 $i$ 的最优反应为下式的解

$$\max_{b_i}(v_i-b_i)\text{Prob}\{b_i>a_j+c_jv_j\}\ .$$

其中我们用到 $b_i = b_j(v_j)$ 的概率为0这一事实（$\text{Prob}\{b_i = b_j\} = 0$，因为 $b_j(v_j) = a_j + c_j v_j$ 且 $v_j$ 服从均匀分布，所以 $b_j$ 也服从均匀分布）。由于 $i$ 的投标价低于参与者 $j$ 最低的可能投标价格没有意义，而高于 $j$ 最高的可能投标价格又显然很愚蠢，我们有 $a_j \leqslant b_i \leqslant a_j + c_j$，于是

$$\text{Prob}\{b_i > a_j + c_j v_j\} = \text{Prob}\{v_j < \frac{b_i - a_j}{c_j}\} = \frac{b_i - a_j}{c_j}.$$

从而参与者 $i$ 的最优反应为

$$b_i(v_i) = \begin{cases} (v_i + a_j)/2 & \text{当 } v_i \geqslant a_j, \\ a_j & \text{当 } v_i < a_j. \end{cases}$$

如果 $0 < a_j < 1$，则一定存在某些 $v_i$ 的值，使 $v_i < a_j$，这时 $b_i(v_i)$ 就不可能是线性的了，而在开始时呈平直，后半段开始倾斜。由于我们要寻找线性的均衡，就可以排除 $0 < a_j < 1$，而只讨论 $a_j \geqslant 1$ 及 $a_j \leqslant 0$ 的情况。但前一种情况是不可能在均衡中出现的，因为估价较高一方对投标价的最优选择是不低于估价较低一方的投标价，我们有 $c_j \geqslant 0$，但这时 $a_j \geqslant 1$ 便意味着 $b_j(v_j) \geqslant v_j$，而这肯定不会是最优的。因此，如果要求 $b_i(v_i)$ 是线性的，则一定有 $a_j \leqslant 0$，这种情况下 $b_i(v_i) = (v_i + a_j)/2$，于是可得 $a_i = a_j/2$ 及 $c_i = 1/2$。

我们可以假定参与者 $i$ 采取战略 $b_i(v_i) = a_i + c_i v_i$，对参与者 $j$ 重复上面的分析，得到类似的结果 $a_i \leqslant 0$，$a_j = a_i/2$ 以及 $c_j = 1/2$。解这两组结果构成的方程组，可得 $a_i = a_j = 0$ 和 $c_i = c_j = 1/2$。亦即前面所讲的 $b_i(v_i) = v_i/2$。

也许有人会关心在此博弈中是否还存在另外的贝叶斯纳什均衡，以及如果投标方估价的概率分布发生变化，均衡的投标价格将如何变化，这两个问题都不能应用前面的方法（即先假定一个线性战略，再推导出使战略符合均衡条件的系数）得到解答：试图猜测这一博弈其他均衡中的函数形式是徒劳的，并且当估价服从任何其他分布时，线性均衡也不存在。在本节的附录中，我们推导一种对称的贝叶斯纳什均衡，[①] 但仍然是在估价服从均匀分布的条件下。在参与者战略严格递增及可微的假定下，我们证明惟一的对称贝叶斯纳什均衡就是本节推导出的线性均衡。我们所运用的技术方法可十分容易地扩展到较广类型的估价分布，以

---

① 当参与者的战略相同时，贝叶斯纳什均衡就被称为是对称的。也就是说，在一个对称的贝叶斯纳什均衡中，存在一个单一的 $b(v_i)$，使参与者1的战略 $b_1(v_1)$ 为 $b(v_1)$，参与者2的战略 $b_2(v_2)$ 为 $b(v_2)$，并且此单一战略是其自身的最优反应。当然，尽管双方都运用同一战略，但由于参与者的估价一般是不一致的，他们的投标价格一般也不会相同。

及两个以上投标者的情况。[①]

### 附录 3.2.B

假设参与者 $j$ 采取战略 $b(\cdot)$，同时假定 $b(\cdot)$ 严格递增并可微。则对一个给定的值 $v_i$，参与者 $i$ 的最优投标价格应满足

$$\max_{b_i}(v_i - b_i)\text{Prob}\{b_i > b(v_j)\} \ .$$

令 $b^{-1}(b_j)$ 表示参与者 $j$ 在选择投标价格 $b_j$ 时一定持有的估价，即如果 $b_j = b(v_j)$，则 $b^{-1}(b_j) = v_j$。由于 $v_j$ 服从区间[0, 1]上的均匀分布，$b_i > b(v_j)$ 的概率等于 $b^{-1}(b_i) > v_j$ 的概率，后者又等于 $b^{-1}(b_i) > v_j$（$\text{Prob}\{b_i > b(v_j)\} = \text{Prob}\{b^{-1}(b_i) > v_j\} = b^{-1}(b_i)$）。从而参与者 $i$ 最优化问题的一阶条件为

$$-b^{-1}(b_i) + (v_i - b_i)\frac{d}{db_i}b^{-1}(b_i) = 0 \ .$$

上面的一阶条件在给定投标方 $i$ 的估价 $v_i$ 时，是关于投标方 $i$ 对投标方 $j$ 的战略 $b(\cdot)$ 最优反应的隐函数。如果要使 $b(\cdot)$ 成为对称的贝叶斯纳什均衡，我们要求一阶条件的解应该等于 $b(v_i)$：也就是说，对参与者 $i$ 每一可能的估价，投标方 $i$ 都不希望背离战略 $b(\cdot)$，只要投标方 $j$ 也选择同一战略。为加入这一要求，我们用 $b_i = b(v_i)$ 代入一阶条件，得

$$-b^{-1}(b(v_i)) + (v_i - b(v_i))\frac{d}{db_i}b^{-1}(b(v_i)) = 0 \ .$$

当然，$b^{-1}(b(v_i))$ 就是 $v_i$，而且 $d\{b^{-1}(b(v_i))\}/db_i = 1/b'(v_i)$，也就是说，$d\{b^{-1}(b_i)\}/db_i$ 衡量为使投标价格发生单位变动，投标方 $i$ 的估价必须发生多大变化，而 $1/b'(v_i)$ 则衡量如果估价发生单位变化，其投标价格将随之发生多大变动。从而，$b(\cdot)$ 必须满足一阶微分方程

$$-v_i + (v_i - b(v_i))\frac{1}{b'(v_i)} = 0.$$

可以将其简化表示为 $b'(v_i)v_i + b(v_i) = v_i$，微分方程等式的左边恰好等于 $d\{b(v_i)v_i\}/dv_i$，对左右两方同时积分得

$$b(v_i)v_i = \frac{1}{2}V_i^2 + k \ ,$$

其中 $k$ 为积分常数。为消除 $k$，我们需要一个边界条件。幸运的是，很简单的经济学理性就提供了一个：没有参与者愿意出高于自己估价的投标价格。

① 跳过此附录将不会影响对以后内容的理解。

从而,我们要求对所有的 $v_i$,都有 $b(v_i) \leqslant v_i$。其一个特例是当 $v_i = 0$ 时,我们要求 $b(0) \leqslant 0$。由于投标价格被限制为非负,这意味着 $b(0) = 0$,于是 $k = 0$,并且 $b(v_i) = v_i/2$,即前面的结论。

### 3.2.C　双向拍卖

下面我们考虑买方和卖方对自己的估价都存在私人信息的情况,参见查特吉和萨缪尔森(Chatterjee & Samuelson, 1983)。(在霍尔(Hall)和拉齐尔,1984)的文献中,买方为一家企业,卖方为一个工人,企业知道工人的边际产出,工人知道他自己的机会成本,参见习题 3.8)。我们分析一个叫做双向拍卖的交易博弈,卖方确定一个卖价 $p_s$,买方同时给出一个买价 $p_b$。如果 $p_b \geqslant p_s$,则交易以 $p = (p_b + p_s)/2$ 的价格进行,如果 $p_b < p_s$,则不发生交易。

买方对标的商品的估价为 $v_b$,卖方的估价为 $v_s$,双方的估价都是私人信息,并且服从[0,1]区间的均匀分布。如果买方以价格 $p$ 购得商品,则可获得 $v_b - p$ 的效用;如果交易不能进行,买方的效用为0。如果卖方以价格 $p$ 售出商品,则可得到 $p - v_s$ 的效用;如果交易不能进行,卖方的效用亦为0(双方的效用函数都是衡量因交易而带来的效用变化,如果交易没有发生,则双方效用均没有变化。我们也可以把卖方效用定义为:当以价格 $p$ 成交时效用为 $p$,交易不发生时效用为 $v_s$,两者并不存在实质区别)。

在这一静态贝叶斯博弈中,买方的一个战略是函数 $p_b(v_b)$,明确了买方在每一可能的类型下将会给出的买价。相似地,卖方的一个战略是函数 $p_s(v_s)$,明确了卖方在不同的估价情况下将出的卖价。如果以下的两个条件成立,战略组合 $\{p_b(v_b), p_s(v_s)\}$ 即为博弈的贝叶斯纳什均衡:对[0,1]区间内的每一 $v_b$,$p_b(v_b)$ 应满足

$$\max_{p_b}\left[v_b - \frac{p_b + E[p_s(v_s) \mid p_b \geqslant p_s(v_s)]}{2}\right]\text{Prob}\{p_b \geqslant p_s(v_s)\} \tag{3.2.3}$$

其中 $E[p_s(v_s) \mid p_b \geqslant p_s(v_s)]$ 为在卖方价格小于买方价格的条件下,卖方价格的期望值。对[0,1]区间的每一 $v_s$,$p_s(v_s)$ 应满足

$$\max_{p_s}\left[\frac{p_s + E[p_b(v_b) \mid p_b(v_b) \geqslant p_s]}{2} - v_s\right]\text{Prob}\{p_b(v_b) \geqslant p_s\} \tag{3.2.4}$$

其中 $E[p_b(v_b) \mid p_b(v_b) \geqslant p_s]$ 为在买方价格大于卖方价格 $p_s$ 的条件下,买方价格的期望值。

此博弈有非常多的贝叶斯纳什均衡,作为一个例子,考虑下面的单一价格均衡,即如果交易发生,交易价格就只是单一的价格。对区间[0,1]上的

许多 $x$，令买方的战略为：如果 $v_b \geq x$，则出买价 $x$，其他情况下出价为 0；同时令卖方的战略为：如果 $v_s \leq x$，则出卖价为 $x$，其他情况下出卖价为 1。给定买方的战略，卖方只能在以价格 $x$ 成交或不能成交之间进行选择，这样卖方战略就是买方战略的最优反应，因为如果卖方的估价小于 $x$，他更愿意以价格 $x$ 成交，而不希望没有交易，即成交是他的最优反应；反之亦然。相似的分析还可以证明，买方战略也是卖方战略的最优反应，从而可证明上述战略为博弈的一个贝叶斯纳什均衡。在这一均衡结果下，图 3.2.1 标出区域内的($v_s$, $v_b$)组合都会发生交易；而对所有 $v_b \geq v_s$ 的($v_s$, $v_b$)组合来讲，交易都是有效率的，但图中阴影部分虽满足效率条件，却没有发生交易。

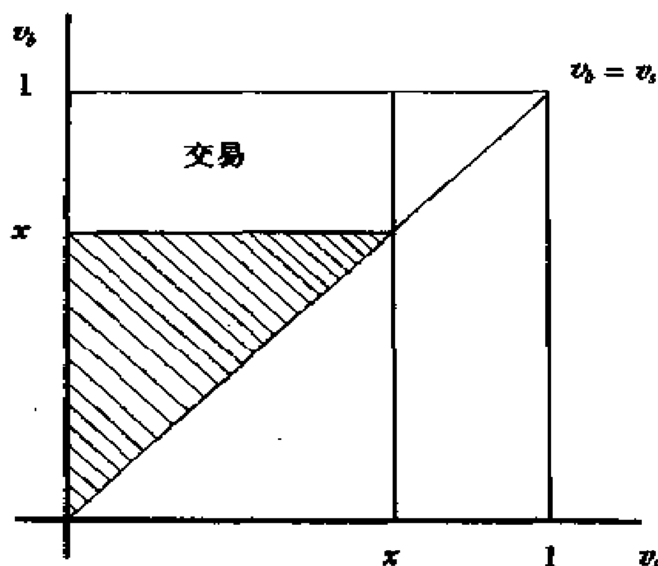



图 3.2.1

现在我们推导双向拍卖的一个线性的贝叶斯纳什均衡。仍如上节强调的，我们并没有限制参与者的战略空间，使之只包含线性战略；而仍允许参与者任意选择战略，看是否存在一个均衡，双方战略都是线性的。除单一价格均衡和线性均衡之外，博弈还存在许多其他均衡，但线性均衡有着有趣的效率特性，我们将在后面进行分析。

假设卖方的战略为 $p_s(v_s) = a_s + c_s v_s$，则 $p_s$ 服从区间[$a_s$, $a_s + c_s$]上的均匀分布，于是(3.2.3)可化为

$$\max_{p_b}\left[v_b - \frac{1}{2}\left\{p_b + \frac{a_s + p_b}{2}\right\}\right]\frac{p_b - a_s}{c_s} .$$

由上式的一阶条件可推出

$$p_b = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s . \tag{3.2.5}$$

从而，如果卖方选择一个线性战略，则买方的最优反应也是线性的；相似地，假设买方的战略为 $p_b(v_b)=a_b+c_bv_b$，则 $p_b$ 服从区间$[a_b, a_b+c_b]$上的均匀分布，于是(3.2.4)可化为

$$\max_{p_s}\left[\frac{1}{2}\left\{p_s+\frac{p_s+a_b+c_b}{2}\right\}-v_s\right]\frac{a_b+c_b-p_s}{c_b} .$$

由上式的一阶条件可得

$$p_s=\frac{2}{3}v_s+\frac{1}{3}(a_b+c_b) . \tag{3.2.6}$$

也就是说，如果买方选择一个线性战略，则卖方的最优反应也是线性的。要使参与双方的线性战略成为彼此战略的最优反应，由(3.2.5)可知 $c_b=2/3$，$a_b=a_s/3$，由(3.2.6)可知 $c_s=2/3$，$a_s=(a_b+c_b)/3$。那么，线性均衡战略为

$$p_b(v_b)=\frac{2}{3}v_b+\frac{1}{12}, \tag{3.2.7}$$

且

$$p_s(v_s)=\frac{2}{3}v_s+\frac{1}{4} \tag{3.2.8}$$

如图 3.2.2 所示。

前面讲过，双向拍卖中当且仅当 $p_b\geqslant p_s$ 才发生交易，合并(3.2.7)和(3.2.8)的条件可知，在线性均衡中，当且仅当 $v_b\geqslant v_s+(1/4)$时才会有交易发生，如图 3.2.3 所示(与图 3.2.3 的表示相印证，图 3.2.2 说明了卖方

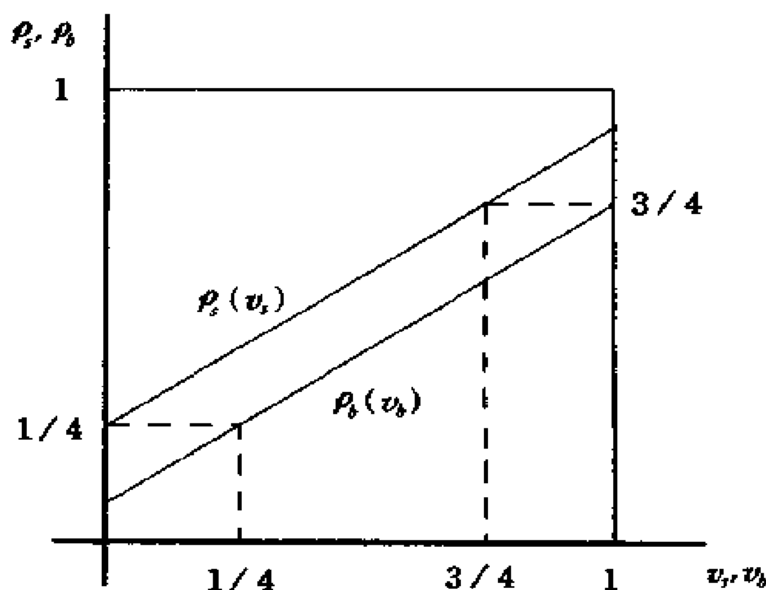



图 3.2.2

的类型高于 3/4 时，他出的卖价超过了买方的最高可能出价 $p_b(1)=3/4$，并且买方的类型低于 1/4 时，他出的买价低于卖方的最低可能要价 $p_s(0)=1/4$）。

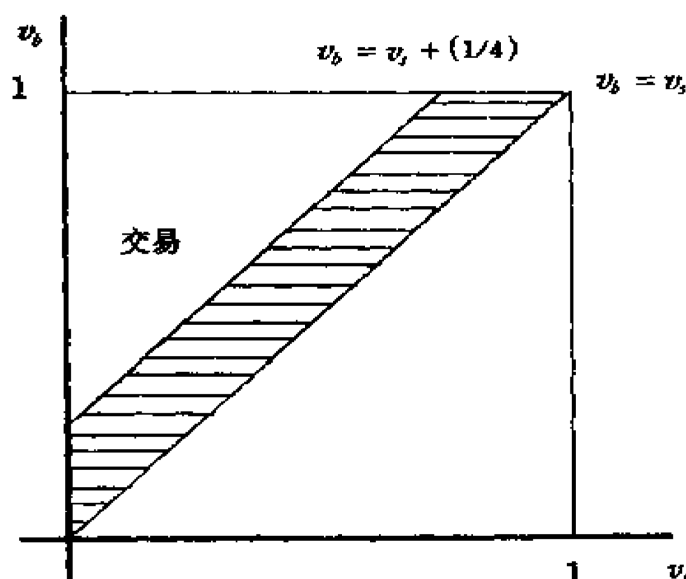



图 3.2.3

比较图 3.2.1 和图 3.2.3，它们分别表示出在单一价格均衡及线性均衡中，交易发生所要求的估价组合。在这两种情况中，交易的潜在价值最大时（具体地讲，当 $v_s=0$ 且 $v_b=1$ 时），都将会发生交易。但是，单一价格均衡漏过了一些有价值的交易（比如 $v_s=0$ 且 $v_b=x-\varepsilon$，其中 $\varepsilon$ 是足够小的正数），而且还包含了一些几乎没有什么价值的交易（比如且 $v_s=x-\varepsilon$ 且 $v_b=x+\varepsilon$）。相反，在线性均衡中，漏过了所有价值不大的交易，只包含了价值至少在 1/4 以上的交易。这表明从参与者可得到的期望获益的角度，线性均衡要优于单一价格均衡，但同时还需要研究是否存在另外的均衡，其中参与者福利状况要更好。

迈尔森和萨特思韦特（Myerson & Satterthwaite, 1983）证明，对于这里考虑的估价的均匀分布，双向拍卖的线性均衡中参与者的期望获益高于博弈的其他任何贝叶斯纳什均衡（包含但不只限于单一价格均衡）。这意味着在双向拍卖中，不存在这样的贝叶斯纳什均衡：交易当且仅当有效率时将会发生（即当且仅当 $v_b \geqslant v_s$ 时）。他们同时证明后一结果相当普遍：如果 $v_b$ 在区间 $[x_b, y_b]$ 连续分布，$v_s$ 在区间 $[x_s, y_s]$ 连续分布，其中 $y_s > x_b$ 且 $y_b > x_s$，则买方和卖方之间不存在他们所乐于进行的讨价还价博弈，在其贝叶斯

纳什均衡中，当且仅当有效率时交易发生。在下一节，我们要简要介绍如何应用显示原理证明这一普遍的结果。作为对本节的总结，我们把这一结果具体运用于霍尔和拉齐尔的就业模型：如果企业有关于工人边际产出($m$)的私人信息，工人则掌握自己机会成本($v$)的私人信息，则企业和工人之间不存在他们乐于进行的讨价还价博弈，当且仅当雇佣有效率(即 $m \geqslant v$)时达成雇佣协议。

## 3.3　显示原理(The Revelation Principle)

显示原理在贝叶斯博弈的条件下最先由迈尔森(1979)提出(其他相关条件下有不同学者也提出过类似的结果)，是在参与者掌握私人信息时进行博弈设计的重要工具。它可应用于前两节讲过的拍卖及双边贸易问题，以及其他很多类似的问题。本节我们先给出并证明静态贝叶斯博弈的显示原理(将证明结果扩展到包含动态贝叶斯博弈十分简单)。不过，在这之前，我们简要介绍显示原理应用于拍卖及双边贸易问题中时所起的作用。

考虑卖方希望设计一个拍卖以使他的期望收入最大化，逐一列出卖方可能考虑的不同的拍卖方式是一项艰巨的工作，例如在第 3.2.B 节的拍卖中，出价最高的投标方付钱给卖方并得到商品，但还存在许多其他可能。如投标方可能还需要支付一定的进入费用，更为一般地，一些失败的投标方也不得不付出一些钱，其数量也许依赖于自己和其他人的投标价格。另外，卖方也可能会制定一个底价——低于此价格的投标价将不会被接受。其他情况还包括，物品可能会有一定的概率卖不出去，而物品的确卖出时，也不总是卖给出价最高的投标方。

这时卖方就可以借助于显示原理来使他的问题得到非常大的简化，这有两个方面。第一，卖方可以将其分析集中在以下类型的博弈：

1. 投标方同时声明(也许是不诚实的)他们自己的类型(即他们各自的估价)。投标方 $i$ 可以自称其类型为 $i$ 的可行类型集 $T_i$ 中的任意 $\tau_i$，而不论他的真实类型 $t_i$ 是什么。
2. 在给定的投标方的声明($\tau_1, \cdots \tau_n$)下，投标方 $i$ 以 $q_1(\tau_1, \cdots, \tau_n)$的概率支付 $x_i(\tau_1, \cdots, \tau_n)$得到标的物品。对所有可能的声明组合($\tau_1, \cdots, \tau_n$)，概率 $q_1(\tau_1, \cdots, \tau_n) + \cdots + q_n(\tau_1, \cdots, \tau_n)$之和必须小于或等于 1。

这种类型的博弈(即每一参与者惟一的行动就是宣布自己所属类型的静态贝叶斯博弈)称为直接机制(direct mechanism)。

第二,根据显示原理,卖方又可以把分析集中到这样的直接机制,其中每一投标方实话实说构成一个贝叶斯纳什均衡——也就是,设计适当的支付和概率函数$\{x_1(\tau_1,\cdots,\tau_n),\cdots,x_n(\tau_1,\cdots,\tau_n);q_1(\tau_1,\cdots,\tau_n),\cdots,q_n(\tau_1,\cdots,\tau_n)\}$使得每一参与者$i$的均衡战略是宣布$\tau_i(t_i)=t_i$,对每一$T_i$中的$t_i$都是如此。实话实说形成贝叶斯纳什均衡的直接机制叫做激励相容(incentive-compatiable)。

在拍卖设计之外的其他问题上,显示原理同样可以用于这两个方面。任何贝叶斯博弈的任何贝叶斯纳什均衡都可以重新表示为经过适当设计的一个新的贝叶斯博弈的新的贝叶斯纳什均衡,这里的"重新表示"我们指对每一可能的参与者的类型组合$(t_1,\cdots,t_n)$,新的均衡下参与者的行动和收益与旧的均衡下完全相同。不论原博弈是什么样子,新的贝叶斯博弈总是一个直接机制。更为正式地:

**定理(显示原理)** 任何贝叶斯博弈的任何贝叶斯纳什均衡,都可以重新表示为一个激励相容的直接机制。

在第3.2.B节分析的拍卖中,我们假定投标方的估价相互独立,同时还假定(暗含于对投标方估价的定义之中)知道投标方$j$的估价并不会改变投标方$i$的估价(尽管这往往会改变$i$的投标价格)。我们把这两个假定所表达的特点归纳为投标方的估价相互独立,并且是各自的私人信息。对这样的情况,迈尔森(1981)计算出了什么样的直接机制有实话实说的均衡,并且哪一个均衡可以使卖方的期望收益最大化。显示原理又保证了没有另外的拍卖机制,其贝叶斯纳什均衡可以使卖方得到更高的期望收益,因为这样的拍卖机制下这样的均衡已经被重新表示为一个直接机制中的一个实话实说均衡,并且所有这样的激励相容的直接机制都已考虑在内了。迈尔森同时还证明了第3.2.B节中分析的拍卖中对称贝叶斯纳什均衡就相当于这里的收益最大化实话实说均衡(正如许多其他常见拍卖博弈中的对称均衡一样)。

作为显示原理在拍卖中应用的第二个例子,考虑第3.2.C节描述的双边贸易问题,我们分析了买卖双方可能会选择进行的一种交易博弈——双向拍卖。在那里,如果交易发生,则买方会支付一些钱给卖方,而如果交易不能发生,则也没有支付,但同样还存在许多其他可能情况。比如,即使交

易不发生，也可能会有支付(从买方向卖方，或者相反)，或者交易发生的概率严格地在0和1之间(0、1间的开区间)；还有，决定交易是否发生的条件可能会要求买方的出价高出卖方要价特定幅度(正的或负的)，而这一幅度甚至还可以依双方出价不同而变动。

我们可以通过以下类型的直接机制把所有这些可能性都考虑进去：买方和卖方同时就各自的类型作出声明，表示为 $\tau_b$ 和 $\tau_s$，之后买方支付给卖方 $x(\tau_b, \tau_s)$，既可以为正也可以为负，并以 $q(\tau_b, \tau_s)$ 的概率获得物品。迈尔森和萨特思韦特推导出什么样的直接机制有实话实说均衡，并且提出了双方在每一种类型下愿意参加博弈的约束条件(即双方在每一种类型下均衡的期望收益不低于该种类型拒绝参加时可得到的收益——具体地说，拒绝参加时，买方的每一类型 $t_b$ 和卖方的每一类型 $t_s$ 的收益都为0)。最后，他们还证明所有激励相容的直接机制都不能达到交易当且仅当有效率时肯定发生的概率为1。从而显示原理也保证了不存在这样的双方都乐于参加的讨价还价博弈，在其贝叶斯纳什均衡中，当且仅当有效率时交易发生。

为给出显示原理的正式表述及其证明，在静态贝叶斯博弈 $G=\{A_1, \cdots, A_n; T_1, \cdots, Tn; p_1, \cdots, p_n; u_1, \cdots, u_n\}$ 中，考虑贝叶斯纳什均衡 $s^*=(s_1^*, \cdots, s_n^*)$。我们将构建一个有着实话实说均衡的直接机制来重新表示 $s^*$。符合条件的直接机制是一个静态贝叶斯博弈，和 $G$ 有相同的类型空间和推断，但其行动空间和收益函数却不一样。新的行动空间非常简单，直接机制中参与者 $i$ 的可行行动就是(可能是不诚实地)声明 $i$ 的所属类型，这就是说，参与者 $i$ 的行动空间为 $T_i$。新的收益函数就复杂多了，它们不仅决定于原博弈 $G$，还决定于原博弈的均衡 $s^*$。问题的关键在于运用 $G$ 的均衡解 $s^*$ 来保证实话实说是直接机制的均衡解，具体证明步骤如下。

说 $s^*$ 是 $G$ 的一个贝叶斯纳什均衡，意味着对每一参与者 $i$，$s_i^*$ 为 $i$ 对其他参与者战略 $(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*)$ 的最优反应。更为具体地，对 $i$ 的每一种类型 $t_i \in T_i$，$s_i^*(t_i)$，都是 $i$ 对给定其他参与者的战略为 $(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*)$ 时，从 $A_i$ 中选择的最优行动。那么，如果 $i$ 的类型为 $t_i$，并且我们允许 $i$ 从 $A_i$ 中包含 $s_i^*(t_i)$ 的一个子集中选择行动，仍然假定其他参与者的战略为 $(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*)$，则 $i$ 的最优选择仍为 $s_i^*(t_i)$。选定直接机制中的收益函数时，就是设法使每一参与者面临和上面相同的选择。

确定直接机制中收益函数的方法如下：首先将新博弈中参与者关于类型的声明 $\tau=(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 代入原博弈中的均衡战略 $s^*$，然后将求得的原博

弈的均衡行动 $s^*(\tau)=(s_1^*(\tau_1),\cdots,s_n^*(\tau_n))$代入原博弈的收益函数。用公式表示，$i$ 的收益函数为

$$v^*(\tau,t)=u_i[s^*(\tau),t],$$

其中 $t=(t_1,\cdots,t_n)$。之所以会得到这样的收益函数，我们可以设想为一个局外人在各参与方之间进行联系，并作内容如下的谈话：

我知道你们都知道自己的类型，并且准备在博弈 $G$ 中选择均衡战略 $s^*$。我希望你们参加一个新的博弈，即直接机制。首先，你们每一个人都要签订一份合约，允许以后再进行博弈 $G$ 时由我指定你们的行动；第二，你们每一个人都写出对自己类型的声明 $\tau_i$，并交给我；第三，我会用每个参与者在新博弈中声明的类型 $\tau_i$，代入原博弈参与者的均衡战略 $s_i^*$，计算出如果参与者的类型真的是 $\tau_i$ 时，他在均衡 $s^*$ 中将会如何行动——也就是 $s_i^*(\tau_i)$。最后，我将指定你们每一个人选择我为你们计算出的行动，并且你们会得到这一结果带来的收益(它依赖于每人的行动与你们真实的类型)。

本节的最后，为完成对显示原理的证明，我们证明实话实说是构建出的直接机制的贝叶斯纳什均衡。通过声明自己的类型 $t_i\in T_i$，参与者 $i$ 事实上就等于从$A_i$ 中选择了行动$s_i^*(\tau_i)$。如果所有其他参与者都实话实说，则他们事实上等于选择了战略$(s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*)$。但前面我们已经证明，如果他们选择了这样的战略，则当 $i$ 的类型为 $t_i$ 时，$i$ 可选择的最优行动为$s_i^*(t_i)$，那么，如果其他参与者实话实说，则当 $i$ 的类型为$t_i$ 时，他的最优选择就是声明自己的类型为 $t_i$。也就是说，实话实说是一个均衡解。更为正式地，在静态贝叶斯博弈$\{T_1,\cdots,T_n;T_1,\cdots T_n;p_1,\cdots,p_n;v_1,\cdots,v_n\}$中，对 $T_i$ 中的每一种$t_i$，每一参与者 $i$ 选择实话实说战略 $T_i(t_i)=t_i$ 构成一个贝叶斯纳什均衡。

## 3.4 进一步阅读

迈尔森(1985)对贝叶斯博弈、贝叶斯纳什均衡及显示原理提供了更为详细的介绍。麦卡菲(McAfee)和麦克米伦(1987)的论文对拍卖文献作了一个很好的综述，包括对优胜者的诅咒(winner's curse)的介绍。布洛和克伦佩雷尔(Bulow & Klemperer, 1991)把第 3.2.B 节的拍卖模型进行了扩展，对(比如说)房产市场中理性的疯狂及崩溃提供了一个颇具说服力的解

释。关于非对称信息下的就业,参见迪尔 Deere, 1988) 分析的一个动态模型,其中工人在一定时间内顺序向一系列企业求职,每一企业都作为私人信息了解工人的边际产出。关于显示原理的应用,参见巴伦(Baron)和迈尔森政府对不了解成本情况的垄断企业进行规制的模型,哈特(Hart, 1983)关于隐含合约及非自愿失业的分析,及萨平顿(Sappington 1983) 的代理理论。

## 3.5 习题与练习

**第3.1节**

3.1 什么是静态贝叶斯博弈?什么是静态贝叶斯博弈的一个(纯)战略?什么是它的(纯战略)贝叶斯纳什均衡?

3.2 考虑下面的古诺双头垄断模型。市场的反需求函数为 $p(Q)=a-Q$,其中 $Q=q_1+q_2$ 为市场总产量。两个企业的总成本都为 $c_i(q_i)=cq_i$,但需求却不确定:分别以 $\theta$ 的概率为高($a=a_H$),以 $1-\theta$ 的概率为低($a=a_L$)。还有,信息也是非对称的:企业1知道需求是高还是低,但企业2不知道。所有这些都是共同知识。两企业同时进行产量决策。请确定这两个企业的战略空间?假定 $a_H$、$a_L$、$\theta$ 和 $c$ 的取值范围使得所有均衡产出都是正数,此博弈的贝叶斯纳什均衡是什么?

3.3 考虑下面的贝兰特德双头垄断模型在非对称信息下的情况,两企业的产品存在差异。对企业 $i$ 的需求为$q_i(p_i,p_j)=a-p_i-b_i\cdot p_j$,两企业的成本都为0。企业 $i$ 的需求对企业$j$ 价格的敏感程度有可能较高,也可能较低,也就是说,$b_i$ 可能等于$b_H$,也可能等于 $b_L$,这里 $b_H>b_L>0$。对每一个企业,$b_i=b_H$ 的概率为$\theta$, $b_i=b_L$ 的概率为 $1-\theta$,并与 $b_j$ 的值无关。每一企业知道自己的 $b_i$,但不知道对方的,所有这些都是共同知识。此博弈中的行动空间、类型空间、推断以及效用函数各是什么?双方的战略空间各是什么?此博弈对称的纯战略贝叶斯纳什均衡应满足哪些条件?求出这样的均衡解。

3.4 在下面的静态贝叶斯博弈中,求出所有的纯战略贝叶斯纳什均衡:

1. 自然决定收益情况由博弈1给出,还是由博弈2给出,选择每一博弈的概率相等;

2. 参与者 1 了解到自然是选择了博弈 1，还是选择了博弈 2，但参与者 2 不知道；
3. 参与者 1 选择相等 $T$ 或 $B$，同时参与者 2 选择 $L$ 或 $R$；
4. 根据自然选择的博弈，两参与者得到相应的收益。

| | L | R |
|---|---|---|
| T | 1,1 | 0,0 |
| B | 0,0 | 0,0 |

博弈 1

| | L | R |
|---|---|---|
| T | 0,0 | 0,0 |
| B | 0,0 | 2,2 |

博弈 2

第 3.2 节

3.5 回顾第 1.3 节我们曾讲过的猜硬币博弈（属于完全信息静态博弈）不存在纯战略纳什均衡，但有一个混合战略纳什均衡：每个参与者都以 1/2 的概率选择出正面。

| | | 参与者 2 | |
|---|---|---|---|
| | | 正面 | 背面 |
| 参与者 1 | 正面 | 1, -1 | -1, 1 |
| | 背面 | -1, 1 | 1, -1 |

对与该博弈相对应的非完全信息博弈，求出一个纯战略贝叶斯纳什均衡，使得非完全信息趋于消失时，参与者在贝叶斯纳什均衡下的行为达到其在原完全信息博弈中混合战略纳什均衡下的行为。

3.6 考虑一个价格优先密封拍卖，其中投标方的估价相互独立，并服从区间[0,1]上的均匀分布。证明如果有几个投标方，则以各自估价的 $(n-1)/n$ 倍作为投标价格是这一拍卖的一个对称贝叶斯纳什均衡。

3.7 霍尔和拉齐尔(1984) 把第 3.2.C 节分析的双向拍卖的买方和卖方的角色作了改动，分别代之以企业和工人，其中企业知道工人的边际产出 $(m)$，工人知道自己的机会成本 $(v)$。在这种情况下，交易意味着工人被企业所雇佣，双方交易的价格就是工人的工资 $w$。如果发生了交易，则企业的收益为 $m-w$，工人的收益为 $w$；如果不发生交易，则企业的收益为 0，工人的收益为 $v$。

和前面相同，假定 $m$ 和 $v$ 相互独立，服从区间[0,1]上的均匀分布。为了进行比较，计算双向拍卖中双方参与者在线性均衡下的期望收益。并改变双向拍卖的条件，考虑如下两个交易博弈：

博弈 $I$:在双方了解到各自的私人信息之前,他们先订立一份合约,规定如果工人被企业所雇佣,则工人的工资为 $w$,但同时任何一方都可以无成本地解除雇佣关系。在双方了解到各自的私人信息后,他们同时宣布是接受工资 $w$ 还是拒绝。如果双方都宣布接受,则交易发生;否则交易不能发生。对给定的[0,1]之间的任意 $w$,此博弈的贝叶斯纳什均衡是什么?参照图 3.2.3 的方式,表示出交易发生的类型组合。求出使双方参与者期望收益之和最大的 $w$ 值,并求出这时的期望收益之和。

博弈 $II$:在了解到各自的私人信息之前,双方签订一份合约,规定将运用以下的动态博弈来决定工人是否加入企业,及一旦加入时的工资水平(严格地说,这里的博弈属于第4章的内容。我们将合并运用本章及第2章讲到的知识,求解此博弈,从而也可以起到温故而知新的作用)。在双方了解到各自的私人信息之后,企业向工人开出工资水平 $w$,工人既可以接受,也可拒绝。试着用逆向归纳法分析这一博弈。请参考第 2.1.A 节对完全信息博弈进行的类似分析,可沿以下的思路:对给定的 $w$ 和 $v$,工人将如何选择?如果企业预测到工人的选择,对给定的 m,企业又将如何决策?这时双方参与者的期望收益之和是多少?

## 3.6 参考文献


Baron, D., and R. Myerson. 1982. "Regulating a Monopolist with Unknown Cost." *Econometrica* 50:911—30.

Bulow, J., and P. Klemperer. 1991. "Rational Frenzies and Crashes." Stanford University Graduate School of Business Research Paper #1150.

Chatterjee, K., and W. Samuelson. 1983. "Bargaining under Incomplete Information." *Operations Research* 31:835—51.

Deere, D. 1988. "Bilateral Trading as an Efficient Auction over Time." *Journal of Political Economy* 96:100—15.

Hall, R., and E. Lazear. 1984. "The Excess Sensitivity of Layoffs and Quits to Demand." *Journal of Labor Economics* 2:233—57.

Harsanyi, J. 1967. "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players Parts Ⅰ Ⅱ and Ⅲ." *Management Science* 14:159—82, 320—34, 486—502.

——. 1973. "Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed Strategy Equilibrium Points." *International Journal of Game Theory* 2:1—23.

Hart, O. 1983. "Optimal Labour Contracts under Asymmetric Information." *Review of Economic Studies* 50:3—35.

McAfee, P., and McMillan. 1987. "Auctions and Bidding." *Journal of Economic Literature* 25:699—738.

Myerson, R. 1979. "Incentive Compatibility and the Bargaining Problem." *Econometrica*. 47:61—73.

——. 1981. "Optimal Auction Design." *Mathematics of Operations Research* 6:58—73.

——. 1985. "Bayesian Equilibrium and Incentive Compatibility: An Introduction." In *Social Goals and Social Organization*. L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein, eds. Cambridge: Cambridge University Press.

Myerson, R., and M. Satterthwaite. 1983. "Efficient Mechanisms for Bilateral Trading." *Journal of Economic Theory* 28:265—81.

Sappington, D. 1983. "Limited Liability Contracts between Principal and Agent." *Journal of Economic Theory* 29:1—21.

# 第 4 章

# 非完全信息动态博弈

本章我们将介绍另一种新的均衡概念——精炼贝叶斯均衡，从而在这四章中就有了四个均衡概念：完全信息静态博弈中的纳什均衡、完全信息动态博弈中的子博弈精炼纳什均衡、非完全信息静态博弈中的贝叶斯纳什均衡以及非完全信息动态博弈中的精炼贝叶斯均衡。看起来我们好像对所研究的每一类型的博弈都发明出了一种新的均衡概念，但事实上这些概念又是密切相关的。随我们研究的博弈逐步复杂，我们对均衡概念也逐渐强化，从而可以排除复杂博弈中不合理或没有意义的均衡，而如果我们运用适用于简单博弈的均衡概念就无法区分。在每一种情况下，较强的均衡概念只在应用于复杂的博弈时才不同于较弱的均衡概念，而对简单的博弈并没有区别。具体地说，精炼贝叶斯均衡在非完全信息静态博弈中即等同于贝叶斯纳什均衡，在完全信息动态博弈(以及在许多完全非完美信息动态博弈，包括第 2.2 节及第 2.3 节讨论过的博弈)中等同于子博弈精炼纳什均衡，在完全信息静态博弈中等同于纳什均衡。

引入精炼贝叶斯均衡的目的是为了进一步强化(即加强对条件的要求)贝叶斯纳什均衡，这和子博弈精炼纳什均衡强化了纳什均衡是相同的。正如我们在完全信息动态博弈中加上了子博弈精炼的条件，是因为纳什均衡无法包含威胁和承诺都应是可信的这一思想；我们在对非完全信息动态博弈的分析中将集中于精炼贝叶斯均衡，是因为贝叶斯纳什均衡也存在同样的不足。回顾前面讲过的，如果参与者的战略要成为一个子博弈精炼纳什均衡，则它们不仅必须是整个博弈的纳什均衡，还必须是其中每一个子博弈的纳什均衡。在本章中，我们用更为广义的后续博弈(continuation game)的概念来代替子博弈的概念——前者可始于任何完全信息集(而不论是否单节)，不再仅开始于单节的信息集。其后，我们进行相似的分析：如果参与者的战略要成为博弈的一个精炼贝叶斯均衡，它们不仅必须是整个博弈的贝叶斯纳什均衡，而且还必须构成每一个后续博弈的贝叶斯纳什均衡。

在第 4.1 节我们一般性地介绍精炼贝叶斯均衡的主要特征。为此,我们暂时采用与上面强调的内容相反的第二(互补的)理解:精炼贝叶斯均衡通过对参与者推断的隐含的分析,强化了子博弈精炼纳什均衡的要求,这也和贝叶斯纳什均衡是相似的。这种第二理解首先由豪尔绍尼(1967)提出,因为我们可以把一个非完全信息博弈描述为一个非完美信息博弈——自然告知参与者 $i$ 他的类型却没有告知 $j$,于是参与者 $j$ 就不知道博弈进行的完整过程。因此,一种为在非完全信息动态博弈中强化贝叶斯纳什均衡而设计的均衡概念,同样可以强化完全非完美信息动态博弈中的子博弈精炼纳什均衡。

在第 4.2 节我们分析非完全信息条件下应用最广的博弈类型:信号博弈(signaling game)。用抽象的语言表述,信号博弈包含两个参与者(其中之一有私人信息,另一个没有),两步行动(首先由掌握私人信息的一方发出一个信号,然后没有私人信息的一方作出反应)。其主要思想是,如果某类有私人信息的参与者愿意发出一种信号,而另外类型的参与者因成本太高无法发出同样的信号,则交流就可达成。首先,我们定义信号博弈的精炼贝叶斯均衡,并描述可能存在的不同种类的均衡结果(分别对应于不同程度的交流,从没有交流到完美交流)。其后,考虑斯彭斯(Spence, 1973)的极富创意的就业市场信号模型,以及迈尔斯和迈卢夫(Myers & Majluf, 1984)的公司投资模型和维克斯(Vickers, 1986)的货币政策模型。

在第 4.3 节我们讨论精炼贝叶斯均衡的其他应用。首先介绍克劳福德和索贝尔(1982)对空谈博弈(cheap-talk game)的分析(即所有的信号都不需任何成本的信号博弈),该模型的应用包括总统否决权威胁、联邦储备委员会关于货币政策的表态,以及组织内部的交流(或"声音"(voice))。在空谈博弈中,交流的程度决定于参与者利益在多大程度上是共同的,而不在于不同类型参与者发出信号的成本差异。其后我们研究索贝尔和高桥(1983)的序贯谈判模型,其中企业必须要承受一次罢工以表明它无法支付更高的工资(比较第 2.1.D 节中鲁宾斯坦的完全信息谈判模型,在均衡情况下不会出现罢工)。最后,我们将介绍克雷普斯、米尔格龙(Milgrom)、罗伯茨以及威尔逊(1982)等人十分重要的研究结论,他们分析了声誉(Reputation)在有限重复的囚徒困境中达成理性合作的关键作用(参照第 2.3.A 节得出的结论,阶段博弈有惟一纳什均衡的有限重复博弈,有惟一的子博弈精炼纳什均衡,即阶段博弈的纳什均衡重复 $n$ 次)。

在第 4.4 节重回理论分析。尽管是本书的最后一节,但它更多地指示博弈论的发展方向及更新和更深入的研究领域,而不只是对以前内容的总

结。我们介绍并举例说明两个(相互承继的)对精炼贝叶斯均衡的再精炼，其中第二个是赵和克雷普斯(Chao & Kreps, 1987)的直观标准(Intuitive Criterion)。

## 4.1 精炼贝叶斯均衡概述

考虑如下完全非完美信息动态博弈。第一，参与者 1 在 3 个行动中进行选择——$L$、$M$ 及 $R$。如果参与者 1 选择 $R$，则博弈结束(不等参与者 2 行动)。如果参与者 1 选择了 $L$ 或 $M$，则参与者 2 就会知道 1 没有选择 $R$ (但不清楚 1 是选择了 $L$ 还是 $M$)，并在或 $L'$ 或 $R'$ 两个行动中进行选择，博弈随之结束。收益情况由图 4.1.1 的扩展式博弈给出。

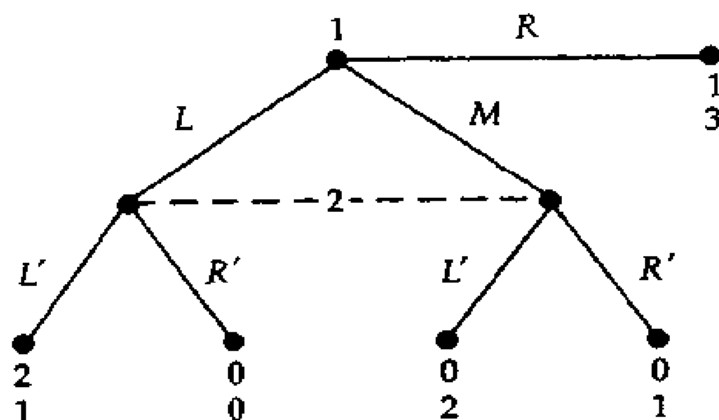



图 4.1.1

| | | 参与者 2 $L'$ | $R'$ |
|---|---|---|---|
| | $L$ | 2,1 | 0,0 |
| 参与者 1 | $M$ | 0,2 | 0,1 |
| | $R$ | 1,3 | 1,3 |

图 4.1.2

通过图 4.1.2 给出的这一博弈的标准式表述，我们可以发现存在两个纯战略纳什均衡$(L, L')$和$(R, R')$。为确定这些纳什均衡是否符合子博弈精炼的条件，我们先明确博弈的子博弈。由于子博弈根据定义始于单一信息集的决策节(但不包含博弈的第一个决策节)，图 4.1.1 里的博弈不存在

子博弈。如果一个博弈没有子博弈，则子博弈精炼的要求(具体地说，即参与者的战略在每一个子博弈中均构成纳什均衡)自然就得到满足。从而在任何没有子博弈的博弈中，子博弈精炼纳什均衡的定义便等同于纳什均衡的定义，于是在图 4.1.1 中，$(L, L')$以及$(R, R')$都是子博弈精炼纳什均衡。然而，$(R, R')$却又明显要依赖于一个不可信的威胁：如果轮到参与者 2 行动，则选择 $L'$要优于选择 $R'$，于是参与者 1 便不会由于 2 威胁他将在其后的行动中选择 $R'$，而去选择 $R$。

使均衡概念得到进一步强化，以排除图 4.1.1 中像$(R, R')$的子博弈精炼纳什均衡的方法之一，是再附加以下两个要求。

**要求 1：** 在每一信息集中，应该行动的参与者必须对博弈进行到该信息集中的哪个节有一个推断(belief)。对于非单节信息集，推断是在信息集中不同节点的一个概率分布；对于单节的信息集，参与者的推断就是到达此单一决策节的概率为 1。

**要求 2：** 给定参与者的推断，参与者的战略必须满足序贯理性(sequentially rational)的要求。即在每一信息集中应该行动的参与者(以及参与者随后的战略)，对于给定的该参与者在此信息集中的推断，以及其他参与者随后的战略(其中“随后的战略”是在达到给定的信息集之后，包括了其后可能发生的每一种情况的完全的行动计划)必须是最优反应。

在图 4.1.1 中，要求 1 意味着如果博弈的进行达到参与者 2 的非单节信息集，则参与者 2 必须对具体到达哪一个节(也就是参与者 1 选择了 $L$ 还是 $R$)有一个推断。这样的推断就表示为到达两个节的概率 $p$ 和 $1-p$，见图 4.1.3。

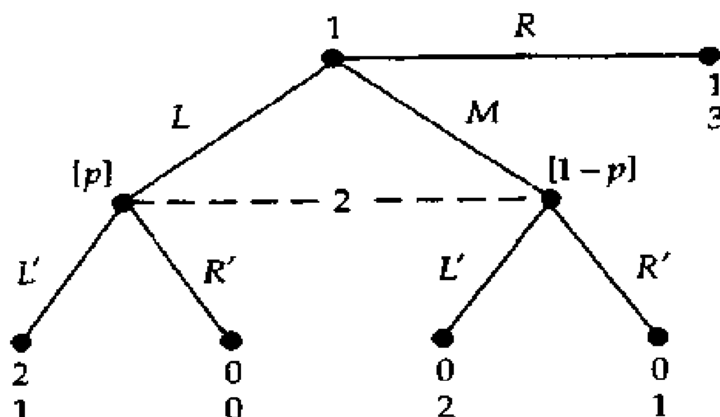



图 4.1.3

给定参与者 2 的推断，选择 $R'$的期望收益就等于 $p\cdot 0+(1-p)\cdot 1=1$

$-p$，而选择 $L'$ 的期望收益等于 $p\cdot 1+(1-p)\cdot 2=2-p$。由于对任意的 $p$，都有 $2-p>1-p$，要求2就排除了2选择 $R'$ 的可能性，从而，在本例中简单要求每一参与者持有一个推断，并且在此推断下选择最优行动，就足以使我们排除不合理的均衡 $(R, R')$。

要求1和2只保证了参与者持有推断，并对给定的推断选择最优行动，但并没有明确这些推断是否是理性的。为进一步约束参与者的推断，我们需要区分处于均衡路径上的信息集和不处于均衡路径上的信息集。

**定义** 对于一个给定的扩展式博弈中给定的均衡，如果博弈根据均衡战略进行时将以正的概率达到某信息集，我们称此信息集处于均衡路径之上(on the equilibrium path)。反之，如果博弈根据均衡战略进行时，肯定不会达到某信息集，我们称之为处于均衡路径之外的信息集(off the equilibrium path)。(其中"均衡"可以是纳什、子博弈精炼、贝叶斯以及精炼贝叶斯均衡)

**要求3：** 在处于均衡路径之上的信息集中，推断由贝叶斯法则及参与者的均衡战略给出。

例如，在图4.1.3的子博弈精炼纳什均衡 $(L, L')$ 中，参与者2的推断一定是 $p=1$：给定参与者1的均衡战略(具体地说，$L$)，参与者2知道已经到达了信息集中的哪一个节。作为要求3的另一种说明(假定性的)，设想在图4.1.3中存在一个混合战略均衡，其中参与者1选择 $L$ 的概率为 $q_1$，$M$ 的概率为 $q_2$，选择 $R$ 的概率为 $1-q_1-q_2$。要求3则强制性规定参与者2的推断必须为 $p=q_1/(q_1+q_2)$。

要求1到3包含了精炼贝叶斯均衡的主要内容，这一均衡概念最为关键的新的特征要归功于克雷普斯和威尔逊(1982)：在均衡的定义中，推断被提高到和战略同等重要的地位。正式地讲，一个均衡不再只是由每个参与者的一个战略所构成，还包括了两个参与者在该他行动的每一信息集中的一个推断。[①] 通过这种方式使参与者推断得以明确的好处在于，和前几章中我们强调参与者选择可信的战略一样，现在我们就可以强调参与者持有

① 克雷普斯和威尔逊通过对序贯均衡(sequential equilibrium)的定义，对均衡的这一特点进行了规范分析，序贯均衡作为一种均衡概念，在很多经济学应用中等同于精炼贝叶斯均衡，但某些情况下可能更强一些。序贯均衡无论在概念上，还是在应用中均要较精炼贝叶斯均衡更为复杂，所以大多数教科书现在都使用后者了。还有一些使用精炼贝叶斯均衡的作者(不精确地)称为序贯均衡。克雷普斯和威尔逊证明，任意的有限博弈(即所有有限参与者、类型有限，可能的行动步数有限的博弈)都有序贯均衡，这也意味着在任何有限博弈中都存在精炼贝叶斯均衡。

理性的推断，无论是处于均衡路径之上(要求 3)，还是处于均衡路径之外(后面的要求 4，以及第 4.4 节中的其他情况)。

在简单的经济学应用中，包括第 4.2.A 节的信号博弈和第 4.3.A 节的空谈博弈——要求 1 到 3 不仅包括了精炼贝叶斯博弈的主要思想，而且还构成了它的定义。不过，在更为复杂的经济学应用中，为剔除不合理的均衡，还需引入进一步的要求。不同的学者使用过不同的精炼贝叶斯均衡定义，所有的定义都包括要求 1 到 3，绝大多数同时包含了要求 4；还有的引入了更进一步的要求。[①] 本章我们用要求 1 到 4 作为精炼贝叶斯均衡的定义。[②]

**要求 4：** 对处于均衡路径之外的信息集，推断由贝叶斯法则以及可能情况下的参与者的均衡战略决定。

**定义** 满足要求 1 到 4 的战略和推断构成博弈的精炼贝叶斯均衡。

对要求 4 再给出一个更为精确的表述当然会有助于我们理解——不包含较为模糊的限定语“可能情况下”，在其后各节的经济学应用分析中我们将完成此项工作。现在，我们通过图 4.1.4 和 4.1.5 中的三位参与者博弈来说明并理解要求 4 的必要性(收益值中，上、中、下分别表示了参与者 1、2、3 的收益)。

此博弈有一个子博弈：它始于参与者 2 的单节信息集。这一子博弈(参与者 2 和 3 之间的)惟一的纳什均衡为$(L, R')$，于是整个博弈惟一的子博弈精炼纳什均衡为$(D, L, R')$。这一组战略和参与者 3 的推断 $p=1$ 满足了要求 1 到要求 3，而且也简单地满足了要求 4，因为没有处于这一均衡路径之外的信息集，于是构成了一个精炼贝叶斯均衡。

下面考虑战略$(A, L, L')$以及相应的推断 $p=0$。这组战略是一个纳什均衡，没有参与者愿意单独偏离这一结果。这一组战略及推断也满足要

---

① 为使读者对要求 1 到 4 之外的因素有一点概念，假设参与者 2 和 3 已观测到同样的事件，并都观察到参与者 1 偏离了均衡行为。在参与者 1 有私人信息的非完全信息博弈中，参与者 2 和 3 是否还应对参与者 1 的类型有同样的推断？在完全信息博弈中，参与者 2 和 3 对之前所观察到的参与者 1 的行动是否应持有相同的推断？相似地，如果参与者 2 和 3 已观测到的事件相同，然后参与者 2 偏离了均衡行动，参与者 3 是否应该改变他对参与者 1 类型的推断，或改变对 1 没观察到的行动的推断？

② 富登伯格和泰勒尔(1991)对非完全信息动态博弈更为广泛的种类给出了精炼贝叶斯均衡的正式定义。他们的定义强调了注①中提到的因素。不过，在本章分析的简单博弈中，此类因素不会被涉及到。所以，他们的定义等价于要求 1 到 4。富登伯格和蒂罗尔还给出了其精炼贝叶斯均衡等价于克雷普斯和威尔逊的序贯均衡的条件。

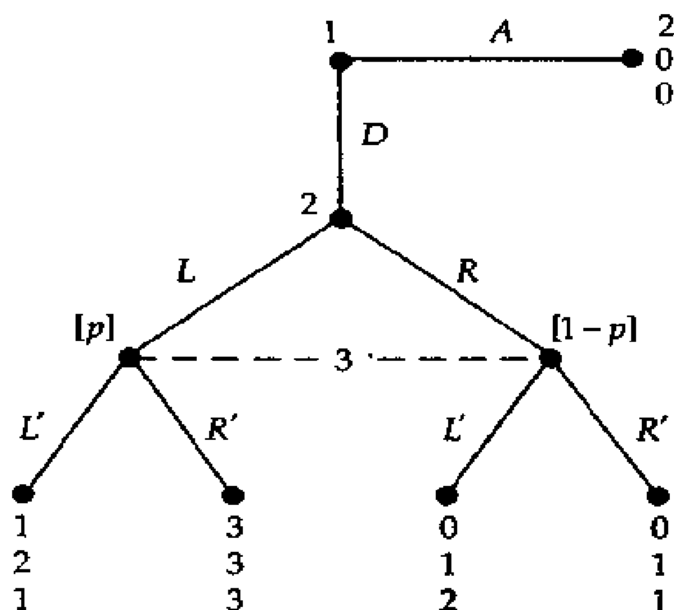



图 4.1.4

求1到3,参与者3有一个推断并根据它选择最优行动。但是,这一纳什均衡却不是子博弈精炼的,因为博弈惟一子博弈的惟一的纳什均衡为$(L, R')$,这也说明要求1到3并不能保证参与者的战略是子博弈精炼纳什均衡。问题在于参与者3的推断$(p=0)$与参与者2的战略$(L)$并不一致,但要求1到3并没有对3的推断进行任何限制,因为如果按给定的战略进行博弈将不会到达3的信息集。不过,要求4强制3的推断决定于参与者2的战略:如果2的战略为$L$,则3的推断必须为$p=1$;如果2的战略为R,则3的推断必须为$p=0$。但是,如果3的推断为$p=1$,则要求2又强制3的战略为$R'$,于是战略$(A, L, L')$及相应推断$p=0$不能满足要求1到4。

为进一步理解要求4,假设图4.1.4稍作改变成为图4.1.5:现在参与者2多出了第三种可能的行动$A'$,也可以令博弈结束(为使表示简化,这一博弈略去了收益情况)。和前例相同,如果参与者1的均衡战略为A,则参与者3的信息集就处于均衡路径之外,但现在要求4却无法从2的战略中决定3的推断。如果2的战略为$A'$,则要求4就对3的推断没有任何限制,但如果2的战略为以$q_1$的概率选择$L$,$q_2$的概率选择$R$,$1-q_1-q_2$的概率选择$A'$,其中,$q_1+q_2=0$,则要求4就限定了3的推断为$p=q_1/(q_1+q_2)$。

在本节的最后,我们非正式地讨论精炼贝叶斯均衡和前几章介绍的均

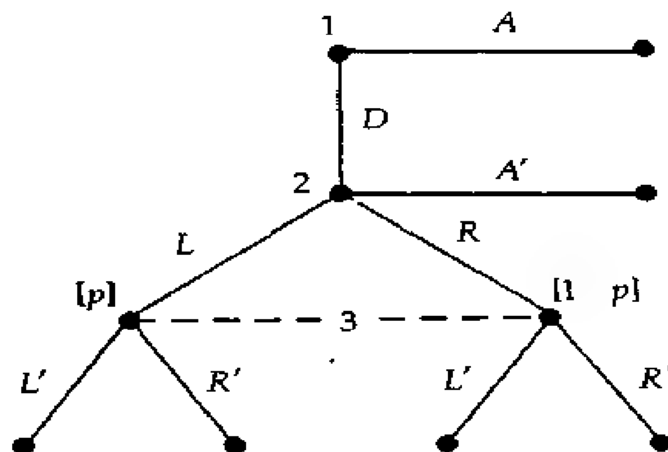



图 4.1.5

衡概念的关系。在纳什均衡中，每一参与者的战略必须是其他参与者战略的一个最优反应，于是没有参与者会选择严格劣战略。在精炼贝叶斯均衡中，要求 1 和 2 事实上就是要保证没有参与者的战略是始于任何一个信息集的劣战略。(参见第 4.4 节给出的始于一个信息集的劣战略的正式定义）纳什均衡及贝叶斯纳什均衡对处于均衡路径之外的信息集则没有这方面的要求，即使是子博弈精炼纳什均衡对某些处于均衡路径之外的信息集也没有这方面的要求，比如对那些不包含在任何子博弈内的信息集。精炼贝叶斯均衡弥补了这一缺陷：参与者不可以威胁使用始于任何信息集的严格劣战略，即使该信息集处于均衡路径之外。

正如前面讲过的，精炼贝叶斯均衡这一概念的优点之一，就是它使得参与者的推断明确化了，从而使我们可以引入要求 3 和 4 以及更进一步的要求(对处于均衡路径之外的推断)。由于精炼贝叶斯均衡排除了参与者 $i$ 选择任何始于处于均衡路径之外信息集的严格劣战略的可能性，要令参与者 $j$ 相信 $i$ 会选择这样一个战略当然也是不合情理的。不过，精炼贝叶斯均衡使得参与者的推断明确化了。这种均衡往往不能沿博弈树通过逆向推导而构建出来，像我们构建子博弈精炼纳什均衡时采用的方法一样。要求 2 决定了参与者在一个给定信息集的行动部分依赖于参与者在该信息集的推断，如果在这一信息集还同时适用于要求 3 或者要求 4，则参与者的推断又由其他参与者在博弈树更上端的行动所决定。但是根据要求 2，这些在博弈树更上端的行动又部分依赖于参与者随后的战略，包括在当初信息集的行动。这一循环推论意味着沿博弈树从后向前逆向推导(一般情况下)将不足以计算出精炼贝叶斯均衡。

# 4.2　信号博弈

## 4.2.A　信号博弈的精炼贝叶斯均衡

信号博弈是两个参与者之间的非完全信息动态博弈：信号发送者(Sender, S)和信号接收者(Receiver, R)，博弈的时间顺序如下：

1. 自然根据特定的概率分布 $p(t_i)$，从可行的类型集 $T=\{t_1,\cdots t_n\}$ 中赋予发送者某种类型 $t_i$，这里对所有的 i，$p(t_i)>0$ 并且 $p(t_1)+\cdots+p(t_I)=1$；
2. 发送者观测到 $t_i$，然后从可行的信号集 $M=\{m_1,\cdots,m_J\}$ 中选择一个发送信号 $m_j$；
3. 接收者观测到 $m_j$(但不能观测到 $t_i$)，然后从可行的行动集 $A\{a_1,\cdots,a_k\}$ 中选择一个行动 $a_k$；
4. 双方收益分别由 $u_s(t_i,m_j,a_k)$ 和 $u_r(t_i,m_j,a_k)$ 给出。

在许多应用中，可行集合 $T$、$M$ 及 $A$ 为实数轴上的区间，而不是上面考虑的有限集。而允许可行的信号集依赖于自然赋予的类型，可行的行动集又依赖于发送者选择的信号的情况也十分容易理解。

信号模型已被十分广泛地应用于经济学领域。为说明其潜在应用的广泛性，我们把将在第4.2.B和第4.2.C节分析的三个应用套用1—4式的规范结构简述如下：

在斯彭斯(1973)的劳动力市场模型中，发送者是一个求职的工人，接收者是潜在的雇主市场，类型为工人的生产能力，信号是工人对教育的选择，行动是市场支付的工资。

在迈尔斯和迈卢夫(1984)的公司投资和资本结构模型中，发送者为要为一个新项目融资的企业，接收者为潜在的投资者，类型为现存资产的盈利能力，信号为企业为所融资金承诺的权益份额，行动则是投资者就是否投资作出的决定。

在一些应用中，信号博弈被融于内容更为丰富的博弈之中。例如，在第二步发送者选择信号之前，接收者可能会有一个行动，或是在第四步接收者选择行动之后(或当时)发送者会有一定的行动。

在维克斯(1986)的货币政策模型中，联邦储备局享有的私人信息是其为促进就业而愿意接受的通货膨胀水平，其他的条件与第2.3.E

节分析的完全信息重复博弈完全相同，不过只包含两个阶段。这样，发送者为联储当局，接收者为就业市场，类型为联储为促进就业而愿意接受的通胀水平，信号为联储对第一期通胀的选择，行动为雇主们对第二期通胀的预期。雇主们对第一期通胀的预期发生在信号博弈之前，联储对第二期通胀水平的选择则在其后。

本节的其余部分暂不分析上面列举的应用模型，而集中研究1—4给出的抽象的信号博弈，图4.2.1给出了一种简单情况的扩展式表述（不考虑收益情况）：$T=\{t_1,t_2\}$，$M=\{m_1,m_2\}$，$A=\{a_1,a_2\}$，，概率 $\text{Prob}\{t_1\}=p$。注意，这里博弈的进行并不是从树的最上端初始节依次到最下端的终点节，而是从树中间自然的初始行动依次进行到左右两端的终点节。

前面已讲过（在任何博弈中）参与者的一个战略是行动的完整计划——战略包含在可能遇到的每一种情况下参与者将选择的行动。因而在信号博弈中，发送者的一个纯战略是函数 $m(t_i)$，明确发送者为自然可能赋予的每一种类型时，将选择的信号；接收者的一个纯战略则是函数 $a(m_j)$，指明对发送者可能会发出的每一种信号将选择什么行动。在图4.2.1的简单博弈中，发送者和接收者都有四个纯战略。

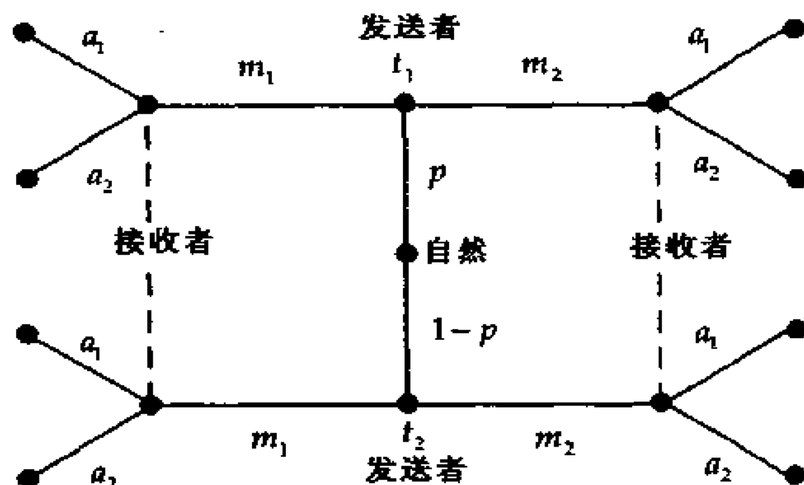



图4.2.1

发送者战略1：如果自然赋予类型 $t_1$，选择信号 $m_1$；如果自然赋予类型 $t_2$，选择信号 $m_1$；

发送者战略2：如果自然赋予 $t_1$，选择 $m_1$；如果自然赋予 $t_2$，选择 $m_2$；

发送者战略3：如果自然赋予 $t_1$，选择 $m_2$；如果自然赋予 $t_2$，选择 $m_1$；

发送者战略4：如果自然赋予 $t_1$，选择 $m_2$；如果自然赋予 $t_2$，选择 $m_2$。

接收者战略1:如果发送者选择信号 $m_1$,选择行动 $a_1$;如果发送者选择信号 $m_2$,选择行动 $a_1$;

接收者战略2:如果发送者选择 $m_1$,选择 $a_1$;如果发送者选择 $m_2$,选择 $a_2$;

接收者战略3:如果发送者选择 $m_1$,选择 $a_2$;如果发送者选择 $m_2$,选择 $a_1$;

接收者战略4:如果发送者选择 $m_1$,选择 $a_2$;如果发送者选择 $m_2$,选择 $a_2$。

我们称发送者的第1和第4战略为混同(pooling)战略,因为在不同类型时都发出相同的信号。在多于两种类型的模型中还存在部分混同(partially pooling)(准分离(semi-separating))战略,其中所有属于给定类型集的类型都发送同样的信号,但不同的类型集发送不同的信号。在图4.2.1的两类型博弈中也存在与混合战略相类似的战略,称为杂合战略(hybrid strategies):比如说类型 $t_1$ 选择 $m_1$,但类型 $t_2$ 却随机选择 $m_1$ 或 $m_2$。

现在,我们把第4.1节中关于要求1到3的一般性表述转化为信号博弈中对精炼贝叶斯均衡的正式定义(对图4.1.5的讨论说明了要求4对信号博弈是没有意义的)。为使问题简化,我们只讨论纯战略。杂合战略在下一节分析就业市场信号时再给以简要介绍。至于如何一般性定义信号博弈中的贝叶斯纳什均衡,我们留作习题,请自己练习,参见习题4.6。

因为发送者在选择信号时知道博弈进行的全过程,这一选择发生于单节信息集(对自然可能赋予的每一种类型都存在一个这样的信息集)。从而,要求1在应用于发送者时就无需附加任何条件;相反,接收者在不知道发送者类型的条件下观测到发送者的信号,并选择行动,也就是说接收者的选择处于一个非单节的信息集(对发送者可能选择的每一种信号都存在一个这样的信息集,而且每一个这样的信息集中,各有一个节对应于自然可能赋予的每一种类型)。把要求1应用于接收者可得到:

**信号要求1** 在观测到 $M$ 中的任何信号 $m_j$ 之后,接收者必须对哪些类型可能会发送 $m_j$ 持有一个推断。这一推断用概率分布 $u(t_i \mid m_j)$ 表示,其中对所求 $T$ 中的 $t_i$,$u(t_i \mid m_j) \geqslant 0$ 且

$$\sum_{t_i \in T} u(t_i \mid m_j) = 1 .$$

给定发送者的信号和接收者的推断,再描述接收者的最优行为便十分简单,把要求2应用于接收者可以得到:

**信号要求2R** 对 $M$ 中的每一 $m_j$,并在给定哪些类型可能发送 $m_j$ 的

推断 $u(t_i|m_j)$ 的条件下，接收者的行动 $a^*(m_j)$ 必须使接收者的期望效用最大化。亦即 $a^*(m_j)$ 为下式的解

$$\max_{m_j \in M} U_S(t_i, m_j, a^*(m_j))$$

要求 2 同样适用于发送者，但发送者有完全信息(及由此而来的单纯推断)，并且只在博弈的开始时行动，于是要求 2 相对比较简单：对给定的接收者的战略，发送者的战略是最优反应：

**信号要求 2S** 对 $T$ 中的每一 $t_i$，在给定接收者战略 $a^*(m_j)$ 的条件下，发送者选择的信号 $m^*(t_1)$ 必须使发送者的效用最大化。亦即 $m^*(t_i)$ 为下式的解

$$\max_{m_j \in M} U_S(t_i, m_j a^*(m_j)) .$$

最后，给定发送者的战略 $m^*(t_i)$，令 $T_j$ 表示选择发送者信号 $m_j$ 的类型集合，也就是说，如果 $m^*(t_i) = m_j$，则 $t_i$ 为 $T_j$ 中的元素。如果 $T_j$ 不是空集，则对应于信号 $m_j$ 的信息集就处于均衡路径之上；否则，任何类型都不选择 $m_j$，其对应的信息集则处于均衡路径之外。对处于均衡路径上的信号，把要求 3 运用于接收者的推断，可以得到：

**信号要求 3** 对每一 $M$ 中的 $m_j$，如果在 $T$ 中存在 $t_i$ 使得 $m^*(t_i) = m_j$，则接收者在对应于 $m_j$ 的信息集中所持有的推断必须决定于贝叶斯法则和发送者的战略：

$$u(t_i|m_j) = \frac{p(t_i)}{\sum_{t_i \in T_j} p(t_i)} .$$

**定义** 信号博弈中一个纯战略精炼贝叶斯均衡为一对战略 $m^*(t_i)$ 和 $a^*(m_j)$ 以及推断 $u(t_i|m_j)$，满足信号要求(1)，(2$R$)，(2$S$)及(3)。

如果发送者的战略是混同的或分离的，我们就称均衡分别为混同的或分离的。

在本节的最后，我们求解图 4.2.2 中两类型博弈的纯战略精炼贝叶斯均衡。请注意这里自然赋予每一类型的可能性是相等的，我们分别用 $(p, 1-p)$ 和 $(q, 1-q)$ 表示接收者在其两个信息集内的推断。

这一两类型、两信号博弈有 4 个可能的纯战略精炼贝叶斯均衡：(1)混同于 $L$；(2)混同于 $R$；(3)分离，$t_1$ 选择 $L$，$t_2$ 选择 $R$；及(4)分离，$t_1$ 选择 $R$，$t_2$ 选择 $L$。我们依次分析这四种可能性。

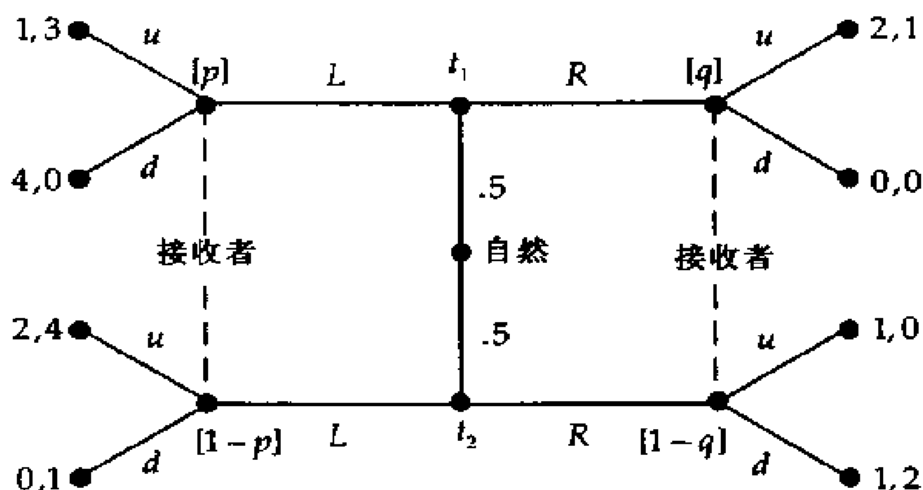



图 4.2.2

1．混同于 $L$：假设存在一个均衡，发送者的战略为$(L,L)$，这里$(m',m'')$表示类型 $t_1$ 选择 $m'$，类型 $t_2$ 选择 $m''$。则接收者对应于 $L$ 的信息集处于均衡路径之上，于是接收者在这一信息集内的推断$(p,1-p)$决定于贝叶斯法则和发送者的战略：$p=0.5$，也就是先验分布。给定这样的推断（事实上或者任何其他推断），接收者在 $L$ 之后的最优反应为选择 $u$，于是类型 $t_1$ 和类型 $t_2$ 的发送者分别可得到的收益为 1 和 2。为确定是否两种类型的发送者都愿意选择 $L$，我们需要明确对 $R$ 接收者将如何反应。如果接收者对 $R$ 的反应为 $u$，则类型 $t_1$ 选择 $R$ 的收益等于 2，它高于 $t_1$ 选择 $L$ 的收益 1。但如果接收者对 $R$ 的反应为 $d$，则通过选择 $R$，$t_1$ 和 $t_2$ 的收益将（分别）为 0 和 1，而他们选择 $L$ 却可分别获得 1 和 2。那么，如果存在一个均衡，其中发送者的战略为$(L,L)$，则接收者对 $R$ 的反应必须为 $d$，于是接收者的战略必须为$(u,d)$，这里$(a',a'')$表示接收者在 $L$ 之后选择 $a'$，在 $R$ 之后选择 $a''$。另外，还需要考虑接收者在对应于 $R$ 的信息集中的推断，以及给定这一推断时选择 $d$ 是否是最优的。由于对接收者当 $q\leqslant 2/3$ 时选择 $d$ 为最优的，我们得到$[(L,L),(u,d),p=0.5,q]$，对任意的 $q\leqslant 2/3$ 为博弈的混同精炼贝叶斯均衡。

2．混同于 $R$：下面假设发送者的战略为$(R,R)$，则 $q=0.5$，于是接收者对 $R$ 的最优反应为 $d$，类型 $t_1$ 和 $t_2$ 分别得到的收益为 0 和 1。但 $t_1$ 选择 $L$ 可得到收益 1，因为对任意 $p$ 值，接收者对 $L$ 的最优反应都是 $u$，于是不存在发送者战略为$(R,R)$的均衡。

3．分离，$t_1$ 选择 $L$：如果发送者选择分离战略$(L,R)$，则接收者的两

个信息集都处于均衡路径之上，于是两个推断都决定于贝叶斯法则和发送者的战略：$p=1, q=0$。接收者在此推断下的最优反应分别为 $u$ 和 $d$，于是两种类型的发送者获得的收益都是 1。另外，还需检验对给定的接收者战略($u$, $d$)，发送者的战略是否是最优的。结果是否定的：如果类型 $t_2$ 不选择 $L$，而选择 $R$，则接收者反应为 $u$ 时，$t_2$ 可获得的收益为 2，超过其选择 $R$ 时的收益 1。

4. 分离，$t_1$ 选择 $R$：如果发送者选择战略($R$, $L$)，则接收者的推断必须为 $p=0, q=1$，于是接收者的最优反应为($u$, $u$)，两种类型的发送者都可得到 2 的收益。如果 $t_1$ 想偏离这一战略而选择 $L$，则接收者的反应将会为 $u$，则 $t_1$ 的收益将减为 1，于是 $t_1$ 没有任何动机偏离 $R$。类似的，如果 $t_2$ 想偏离这一战略而选择 $R$，则接收者的反应将为 $u$，$t_2$ 的收益将减为 1，于是 $t_2$ 也没有任何动机偏离 $L$。从而[($R$, $L$), ($u$, $u$) $p=0, q=1$]为博弈分离的精炼贝叶斯均衡。

### 4.2.B 就业市场信号

关于信号博弈的大规模深入研究始于斯彭斯(1973)的模型，该模型不仅开创了广泛运用扩展式博弈描述经济问题的先河，还较早给出了如精炼贝叶斯均衡等均衡概念的定义。本节中我们通过扩展式博弈介绍斯彭斯的模型，并描述它的一些精炼贝叶斯均衡解，在第 4.4 节我们将进一步精炼后的精炼贝叶斯均衡应用于这一博弈。时间顺序如下：

1. 自然决定一个工人的生产能力 $\eta$，它可能高($H$)也可能低($L$)，$\eta=H$ 的概率为 $q$。
2. 工人认识到自己的能力，并随后选择一个教育水平 $e\geqslant 0$。
3. 两个企业观测到工人的教育水平(而不是工人的能力)，并同时向工人给出一个工资水平的出价。[①]
4. 工人接受两个出价中较高的工资，在出价相等时掷硬币决定。令 $w$ 表示工人接受的工资水平。

工人的收益为 $w-c(\eta, e)$，其中 $c(\eta, e)$ 是能力为 $\eta$ 的工人得到教育 $e$ 所花费的成本；企业的收益为 $y(\eta, e)-w$，其中 $y(\eta, e)$ 表示能力为 $\eta$ 并且教育水平为 $e$ 的工人的产出；没有雇到工人的企业收益为 0。

我们(在本节及第 4.4 节更进一步的讨论中)将集中于一个特定的精炼

---

① 在接收者一方出现了两个企业这一点使此博弈与前一节分析的博弈类型稍有不同，但请参见等式(4.2.1)之前的有关讨论。

贝叶斯均衡,其中企业把教育水平解释为关于能力的一个信号,从而给受过更高教育的工人开出更高的工资。斯彭斯(1973)论文稍显不足的一点在于,即使教育对于生产率完全没有任何影响(即,即使能力为 $\eta$ 的工人产出等于 $y(\eta)$,和 $e$ 完全无关),工资也可以据此随教育程度的提高而提高。斯彭斯(1974)的论文又使其论证更为一般化,允许产出不仅可能随能力而提高,还可能随教育而提高;类似的结论从而变为工资随教育而提高的幅度,大于教育对生产率的促进可以解释的水平。我们沿用后面更为一般的方法。[①]

在学校读书时间更长的工人,其工资也更高(平均而言)已成为广泛接受的事实(作为一个例子,参见曼塞尔(Mincer, 1974)。这一事实也使得用在学校读书的时间来表示变量 $e$ 成为首选。在分离均衡中,我们可以想象为能力较低的工人只读到高中毕业,能力较高的工人则完成了大学教育。但不幸的是,把 $e$ 解释为学校教育的时间将引起 1-4 的简单博弈中没有涉及到的动态问题,比如在工人大学一年级毕业时(即在能力较低的工人根据假设离开学校之后,而在能力较高的工人根据假设离开学校之前)企业向其开出工资的可能性。在更为丰富的模型中,工人可以在每一年选择是接受当年所给出的最高工资出去工作、还是继续读书,第二年再进行选择。内尔德克(Noldeke)和范·达默(Van Damme, 1990)分析了属于上面类型的更为丰富的博弈,并证明:(i)存在多个精炼贝叶斯均衡;(ii)通过和我们将在第 4.4 节运用的再精炼方法非常相近的精炼之后,只有一个均衡存留下来;以及(iii)这一存留的均衡与 1—4 中简单博弈通过第 4.4 节再精炼之后的惟一均衡完全相同。从而,在 1—4 的简单博弈中,我们也可以不太严格地把 $e$ 看成学校教育的时间,因为在更为丰富的博弈中的结果是一致的。

不过,在这里我们将把 $e$ 的差异解释为学生在学校里表现的差异,而不是学生接受学校教育时间的差异,从而绕过上面的动态问题。据此,1—4 的博弈就可以运用于一组高中毕业生(即接受整整 12 年教育的工人),或一组大学毕业生或 MBA。在这种解释下,$e$ 衡量所学课程的门数及种类、在固定的教育期内取得的学分质量和赢得的荣誉等。学费支出(如果有的话)从而和 $e$ 不再相关,于是成本函数 $c(\eta, e)$ 量度非货币的(或精神的)成本:在给定的学校中,能力较低的学生发现要取得好成绩更加困难,同时在一所

---

① 正式地,我们假定高能力的工人有更高的生产率(即对每一 $e$, $y(H, e) > y(L, e)$,并且教育并不会使生产率降低(即对所有的 $\eta$ 和所有的 $e$, $y_e(\eta, e) \geq 0$,其中 $y_e(\eta, e)$ 表示能力为 $\eta$ 教育水平为 $e$ 的工人进一步教育的边际生产率)。

更具竞争力的学校中要得到相同的分数也更加困难。用教育以此种方法作为一个信号也可以说明下面的事实：企业雇佣给定学校中最好的毕业生和最好学校的毕业生，并支付他们更高的工资。

斯彭斯的模型中最关键的假定是较低能力的工人发出同样的信号要比较高能力工人花费的成本高，更为精确地，较低能力工人受教育的边际成本要高于较高能力工人：对所有 $e$

$$c_e(L,e) > c_e(H,e)\ ,$$

其中 $c_e(\eta,e)$表示能力为 $\eta$、教育水平为 $e$ 的工人进一步教育的边际成本。为解释这一假定，考虑一个教育水平为 $e_1$ 的工人，其工资水平为 $w_1$，如图 4.2.3 所示，并计算这一工人的教育水平要从 $e_1$ 提高到 $e_2$ 需要相应提高多少工资才能够得到补偿。答案决定于工人的能力：低能力的工人发现要取得更高的教育较为困难，于是就需要工资增加得更高些（增加到 $w_L$，而不是只增加到 $w_H$），才足以补偿他的努力。这一假定用图形表示就是低能力工人的无差异曲线较高能力工人更为陡峭——比较图中的 $I_L$ 和 $I_H$。

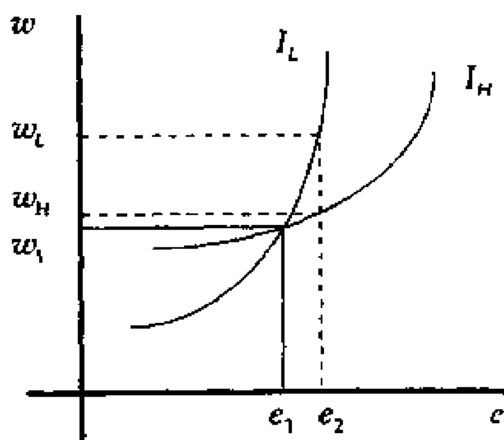



图 4.2.3

斯彭斯同时还假定企业之间的竞争可使期望利润趋于 0。在我们的模型中建立这一假定的方法之一，是把第(3)阶段的两个企业用市场这一单一参与者代替，它给出单一的工资要约 $w$，并得到收益 $-[y(\eta,e)-w]^2$（通过这种转换可使模型属于前一节定义的单一接收者信号博弈）。为最大化其期望收益，根据信号要求 2R 的要求，对给定的市场在观测到 $e$ 之后关于工人能力的推断，市场的工资要约将等于教育水平为 $e$ 的工人的期望产出：

$$w(e) = \mu(H\mid e)\cdot y(H,e) + [1-\mu(H\mid e)]\cdot y(L,e)\ , \qquad (4.2.1)$$

其中 $\mu(H\mid e)$表示市场断定的工人能力高的概率。在阶段(3)，直接分析有

两个企业相互竞争性地开出工资要约，也会得到相同的结果，而不需要借助于称之为市场的虚拟参与者。不过，为保证企业将永远开出等于工人期望产出的工资，我们还需要加上另一假定：观测到教育选择 $e$ 之后，两企业持有关于工人能力的推断是相同的，我们仍用 $\mu(H|e)$表示。由于信号要求 3 决定了在观测到处于均衡路径之上的 $e$ 后，两企业必须持有的推断，我们的假定事实上就是要求在观测到不处于均衡路径上的 $e$ 被选择后，两企业所持有的推断仍然相同。在这一假定下，可以进而得到在任何精炼贝叶斯均衡中，两企业给出的工资要约都为(4.2.1)中的 $w(e)$，正像第 1.2.$B$ 节的贝特兰德模型，两企业的报价都等于产出的边际成本。从而，在本节的两接收者模型中(4.2.1)就可以替代相互要求 2$R$。

作为分析这一信号博弈的精炼贝叶斯均衡的准备，我们首先考虑和它对应的完全信息博弈。也就是说，我们暂时假定工人的能力在所有参与者之间是共同知识，而不只是工人的私人信息。在这种情况下，阶段(3)两企业之间的竞争意味着能力为 $\eta$、教育水平为 $e$ 的工人可得到工资 $w(e)=y(\eta,e)$，从而能力为 $\eta$ 的工人选择满足下式的 $e$：

$$\max_{e} y(\eta,e)-c(\eta,e)\ .$$

用 $e^*(\eta)$表示最优解，如图 4.2.4 所示，并令 $w^*(\eta)=y[\eta,e^*(\eta)]$。

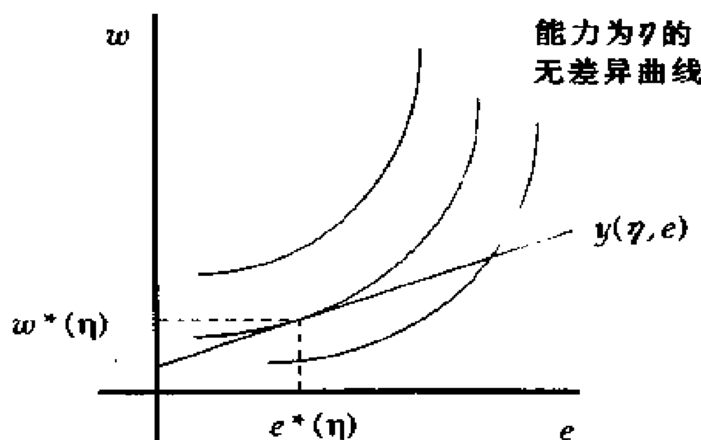



图 4.2.4

现在，我们(永远地)回到工人的能力是私人信息的假定。这提供了一种可能性，即低能力的工人冒充为高能力的工人，从而可能会发生两种情况。图 4.2.5 表示的情况为，对低能力工人来讲要得到教育水平 $e^*(H)$所花费的成本过高，即使可骗取企业相信该工人是高能力的并可得到工资 $w^*(H)$，也不足以补偿。也就是说，在图 4.2.5 中，$w^*(L)-c[L,e^*$

$(L)] > w^*(H) - c[L, e^*(H)]$。

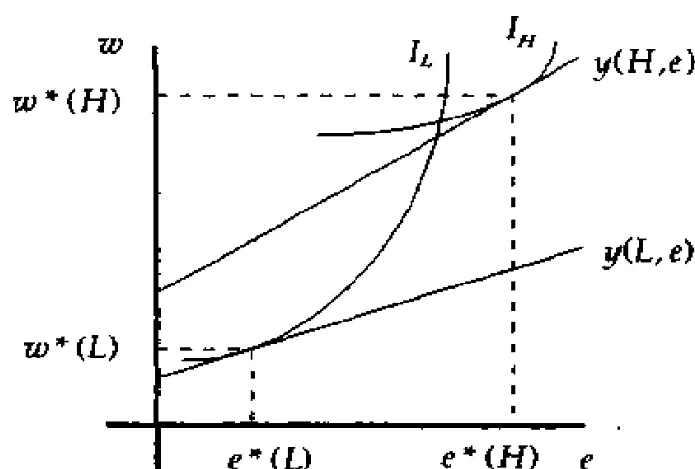



图 4.2.5

图 4.2.6 则表示了相反的情况，我们可以把这种情况理解为低能力的工人嫉妒高能力工人在完全信息条件下的工资和教育水平——也就是说，$w^*(L) - c[L, e^*(L)] < w^*(H) - c[L, e^*(H)]$。后一种情况即更加现实，而且（正如我们将看到的）更加有趣。在工人的能力不限于两个值的模型中，前一种情况只有当每一可能的能力值都和其相邻的可能值有足够差异时才可能发生。例如，如果能力是一个连续变量，则就适用于后一种情况。

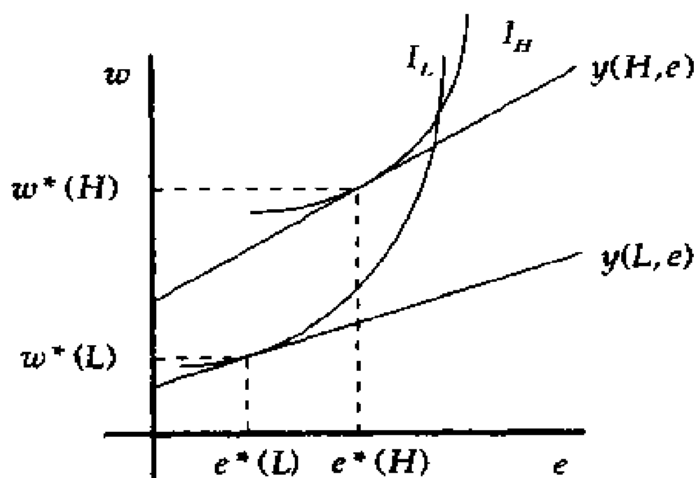



图 4.2.6

和前一节描述的相同，这一模型可以存在 3 类精炼贝叶斯均衡：混同、分离以及杂合，每一类均衡的存在都十分广泛，我们只集中讨论几个例子。

在两种类型的工人都选择单一的教育水平 $e_p$ 的混同均衡中，根据信号要求 3，企业在观测到 $e_p$ 之后的推断必须等于其先验推断，$\mu(H|e_p)=q$，这又意味着在观测到 $e_p$ 之后给出的工资要约必须为

$$w_p = q\cdot y(H,e_p)+(1-q)\cdot y(L,e_p)\ . \tag{4.2.2}$$

为完成对这一混同精炼贝叶斯均衡的描述，还必须(i)对不属于均衡教育选择的 $e\neq e_p$，明确企业的推断 $\mu(H|e)$，它又可通过(4.2.1)决定企业战略 $w(e)$ 的其余部分，以及(ii)证明两种类型的工人对企业战略 $w(e)$ 的最优反应都是选择 $e=e_p$，这两步分别代表了信号要求 1 和 2S；前面还已提到，(4.2.1)在这一两接收者模型中代表了信号要求 2R。

一种可能情况是企业推断任何不等于 $e_p$ 的教育水平 $e$ 都意味着工人是低能力的：对所有 $e\neq e_p$，都有 $\mu(H|e)=0$。尽管这一推断看起来可能比较奇怪，可精炼贝叶斯均衡的定义中并没有任何条件将其排除在外。因为要求 1 到 3 并没有对不处于均衡路径上的推断进行任何限制，而要求 4 对信号博弈又没有意义。我们将在第 4.4 节应用的再精炼方法的确对信号博弈中处于均衡路径之外的推断进行限制，事实上，它排除了这里所分析的推断。在这里对混同均衡的分析中，我们重点讨论这一推断是为了叙述上的简明，但同时也简要考虑其他推断。

如果企业的推断为

$$\mu(H|e)=\begin{cases}0 & \text{当 } e\neq e_p\\ q & \text{当 } e=e_p\end{cases} \tag{4.2.3}$$

则据(4.2.1)企业的战略为

$$w(e)=\begin{cases}y(L,e) & \text{当 } e\neq e_p\\ w_p & \text{当 } e=e_p\ .\end{cases} \tag{4.2.4}$$

能力为 $\eta$ 的工人从而将选择满足下式的 $e$

$$\max_{e} w(e)-c(\eta,e)\ . \tag{4.2.5}$$

(4.2.5)的解十分简单：能力为 $\eta$ 的工人或者选择 $e_p$，或者选择使 $y(L,e)-c(\eta,e)$ 最大化的教育水平(后者恰好等于低能力工人的 $e^*(L)$)。在图 4.2.7 所示的例子中，前者对两种类型的工人都是最优的：低能力工人通过点 $[e^*(L),w^*(L)]$ 的无差异曲线处于其通过点 $(e_p,w_p)$ 的无差异曲线下方，而高能力工人通过点 $(e_p,w_p)$ 的无差异曲线处于工资函数 $w=y(L,e)$ 的上方。结论就是，给定图 4.2.7 中的无差异曲线、生产函数和图中 $e_p$ 的值，工人的战略 $[e(L)=e_p,e(H)=e_p]$ 和(4.2.3)式的推断 $\mu(H|e)$ 以及(4.2.4)式企业的战略 $w(e)$ 为博弈的混同精炼贝叶斯均衡。

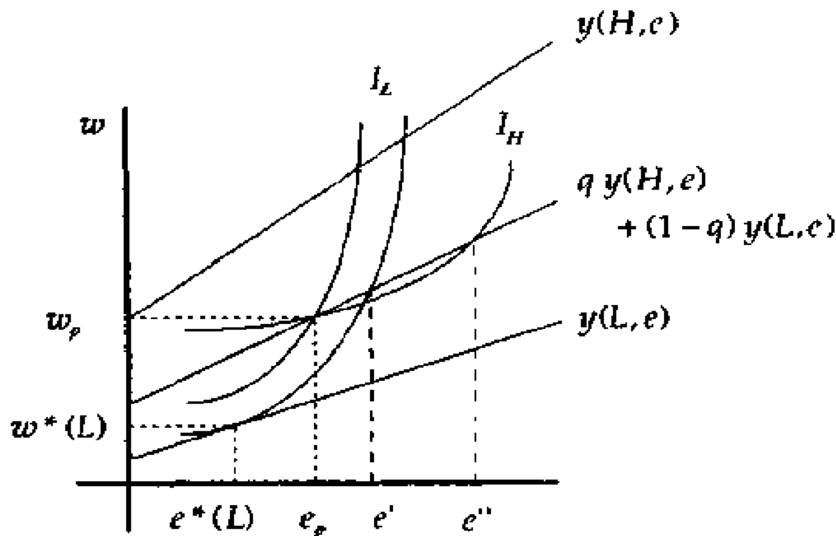



图 4.2.7

在图 4.2.7 所示的例子中，同样的无差异曲线和生产函数，还存在着许多其他的混同精炼贝叶斯均衡。在有些均衡中，工人可能选择另外一个教育水平（而不是图中所示的 $e_p$）；还有的均衡中工人选择的教育水平相同，但均衡路径之外情况有所差异。作为前一情况的一个例子，令 $\hat{e}$ 表示处于 $e_p$ 和 $e'$ 之间的教育水平，其中图 4.2.7 中的 $e'$ 为工人通过 $(e^*(L), w^*(L))$ 的无差异曲线与工资函数 $w = q\cdot y(H,e) + (1-q)\cdot y(L,e)$ 交点处的教育水平。如果我们在(4.2.3)和(4.2.4)式中用 $\hat{e}$ 替换 $e_p$，则得到的企业的推断和战略与工人的战略 $[e(L)=\hat{e}, e(H)=\hat{e}]$ 构成了另外一个混同精炼贝叶斯均衡；作为后一种情况的一个例子，假设企业的推断满足(4.2.3)，只不过教育水平高于 $e''$ 时，企业推断工人的类型根据其先验概率随机分布：

$$\mu(H\mid e)=\begin{cases} o & \text{当 } e\leqslant e'' \text{ 除 } e=e_p \\ q & \text{当 } e=e_p \\ q & \text{当 } e>e'', \end{cases}$$

其中图 4.2.7 的 $e''$ 为高能力工人通过点 $(e_p, w_p)$ 的无差异曲线与工资函数 $w=q\cdot y(H,e)+(1-q)\cdot y(L,e)$ 的交点所对应的教育水平。则企业的战略为：

$$w(e)=\begin{cases} y(L,e) & \text{当 } e\leqslant e'', \text{除 } e=e_p \\ w_p & \text{当 } e=e_p \\ w_p & \text{当 } e>e_p\,. \end{cases}$$

上述企业的推断和战略以及工人的战略($e(L)) = e_p, e(H) = e_p$)为第三个混同精炼贝叶斯均衡。

现在，我们转向对分离均衡的讨论。在图4.2.5(无妒嫉的情况)中，最自然的分离精炼贝叶斯均衡中工人的战略为$[e(L)=e^*(L), e(H)=e^*(H)]$，则信号要求3决定了在观测到两个教育水平中任何一个后企业的推断(具体地讲，$\mu[H|e^*(L)]=0$且$\mu[H|e^*(H)]=1$)，于是据(4.2.1)可得$w[e^*(L)]=w^*(L)$且$w[e^*(H)]=w^*(H)$。与对混同均衡的讨论相似，要完成对这一分离精炼贝叶斯均衡的描述还需要：(i)明确非均衡的教育水平(即除$e^*(L)$和$e^*(H)$之外的$e$的值)被选中时企业的推断$\mu[H|e)$，根据(4.2.1)它又决定企业战略$w(e)$的其余部分；和(ii)证明能力为$\eta$的工人对企业战略$w(e)$的最优反应就是选择$e=e^*(\eta)$。

满足这些条件的推断之一是如果教育水平$e$不低于$e^*(H)$，则工人是高能力的，否则便是低能力的：

$$\mu(H|e)=\begin{cases}0 & \text{当 } e<e^*(H)\\ 1 & \text{当 } e\geqslant e^*(H)\end{cases}. \tag{4.2.6}$$

于是，企业的战略相应为

$$w(e)=\begin{cases}y(L,e) & \text{当 } e<e^*(H)\\ y(H,e) & \text{当 } e\geqslant e^*(H)\end{cases} \tag{4.2.7}$$

由于$e^*(H)$是高能力工人对工资函数$w=y(H,e)$的最优反应，在这里它同样也是最优反应。对低能力工人来讲，当工资函数为$w=y(L,e)$时，$e^*(L)$是该工人的最优反应，那么$w^*(L)-c[L,e^*(L)]$为工人在所有$e<e^*(H)$的选择中可能达到的最高收益。由于低能力工人的无差异曲线较高能力工人的更为陡峭，$w^*(H)-c[L,e^*(H)]$为低能力工人在所有$e\geqslant e^*(H)$的选择中可能达到的最高收益。那么，因为在没有妒嫉的情况下，$w^*(L)-c[L,e^*(L)]>w^*(H)-c[L,e^*(H)]$，$e^*(L)$便是低能力工人的最优反应。

此后，我们不再考虑没有妒嫉的情况。前面已经提到，图4.2.6(存在妒嫉的情况)更为有趣。这时高能力工人不能简单地只靠选择教育水平$e^*(H)$就可以获得高工资$w(e)=y(H,e)$，而在完全信息条件下则可以。为了证明其能力，高能力工人必须选择$e_s>e^*(H)$，如图4.2.8所示，因为低能力工人将效仿$e^*(H)$到$e_s$之间的任何教育水平$e$，如果这样做可令企业误以为他属于高能力工人的话。正式地讲，现在一般的分离精炼贝叶斯均衡中，工人的战略为$[e(L)=e^*(L), e(H)=e_s]$，均衡推断$\mu[H|e^*(L)]$

$=0$ 且 $\mu[H|e_s]=1$ 以及企业的均衡工资 $w^*[e^*(L)]=w^*(L)$ 且 $w(e_s)=y(H,e_s)$。这也是我们通过第 4.4 节的再精炼之后惟一留存的均衡结果。

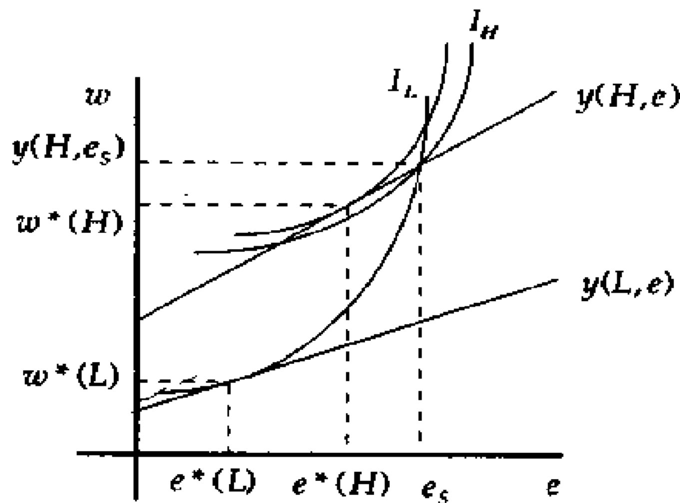



图 4.2.8

如下企业对均衡以外的教育水平的推断可以支持上面的均衡结果：如果 $e\geqslant e_s$，工人是高能力的；否则就是低能力的：

$$\mu(H|e)=\begin{cases}0 & 当\ e<e_s\\ 1 & 当\ e\geqslant e_s\end{cases}.$$

于是，企业的战略为

$$w(e)=\begin{cases}y(L,e) & 当\ e<e_s\\ y(H,e) & 当\ e\geqslant e_s\end{cases}.$$

给定上面的工资函数，低能力工人有两个最优反应：选择 $e^*(L)$ 并挣得 $w^*(L)$；或者选择 $e_s$ 并赚得 $y(H,e_s)$，我们将假定出现这一无差异的情况时，工人更倾向于 $e^*(L)$；或者我们也可以将 $e_s$ 提高一个非常小的量，使得低能力工人严格倾向于选择 $e^*(L)$。对高能力工人来讲，由于 $e_s>e^*(H)$，选择 $e>e_s$ 要较 $e_s$ 为劣。由于低能力工人的无差异曲线较高能力工人的更为陡峭，后者通过点 $(e_s,y(H,e_s))$ 的无差异曲线当 $e<e_s$ 时处于工资函数 $w=y(L,e)$ 的上方，所以选择 $e<e_s$ 同样较 $e_s$ 为劣。从而，高能力工人对企业战略 $w(e)$ 的最优反应为 $e_s$。

和混同均衡的情况一样，博弈也存在另外的分离均衡，在一些均衡中，高能力工人选择不同的教育水平（低能力工人总是因选择 $e^*(L)$ 而被分

离，参见下文)，还有些均衡中教育水平的选择 $e^*(L)$，$e_s$ 与这里的相同，但处于均衡路径之外的推断不同。作为前者的一个例子，令 $\hat{e}$ 为高于 $e_s$ 的教育水平，但又不足以高到使高能力工人不愿意选择 $\hat{e}$，而宁愿被认为自己是低能力的：对所有 $e$，$y(H,\hat{e}-c(H,\hat{e}))$ 都要大于 $y(L,e)-c(H,e)$。如果我们在图4.2.8的博弈中，用 $\hat{e}$ 替换 $\mu(H|e)$ 和 $w(e)$ 表达式里的 $e_s$，则由此形成的企业的推断和战略与工人的战略 $[e(L)=e^*(L), e(H)=\hat{e}]$ 一起，构成一个分离的精炼贝叶斯均衡。作为后者的一个例子，令企业对严格处于 $e^*(H)$ 和 $e_s$ 之间的教育水平的推断严格大于0，为一个足够小的正数，使得据此得出的战略 $w(e)$ 严格处于低能力工人通过点 $(e^*(L), w^*(L))$ 的无差异曲线的下方。

本节的最后，我们简要讨论一下杂合均衡。其中一种类型肯定选择某一教育水平，但另一种类型随机选择是与第一种类型混同(通过选择前一类型的教育水平)，还是与前一类型分离(通过选择不同的教育水平)。我们分析低能力工人随机选择的情况；习题4.7讨论互补的情况。假设高能力工人选择教育水平 $e_h$(这里脚标 $h$ 表示杂合(hybrid))，但低能力工人随机选择 $e_h$(以 $\pi$ 的概率)或 $e_L$(以 $1-\pi$ 的概率)。信号要求3(将其扩展到允许混合均衡存在的情况仍适用)决定了企业在观测到 $e_h$ 或 $e_L$ 后的推断：据贝叶斯法则可得①

$$\mu(H|e_h)=\frac{q}{q+(1-q)\pi}. \tag{4.2.8}$$

并且根据常识可得观测到 $e_L$ 后的推断 $\mu(H|e_L)=0$。以下三方面有助于理解(4.2.8)：第一，由于高能力工人总是选择 $e_h$，但低能力工人只以 $\pi$ 的概率选择 $e_h$，观测到 $e_h$，就说明工人为高能力的概率要更高一些，于是 $\mu(H|e_h)>q$；第二，当 $\pi$ 趋向于0时，低能力工人几乎不会和高能力工人混同，于是 $\mu(H|e_h)$ 趋于1；第三，当 $\pi$ 趋于1时，低能力工人几乎总是和高能力工人混同，于是 $\mu(H|e_h)$ 趋向于先验推断 $q$。

当低能力工人选择 $e_L$，从而可与高能力工人相分离时，推断 $\mu(H|e_L)=0$ 意味着工资 $w(e_L)=y(L,e_L)$，由此又可推出 $e_L$ 必须等于 $e^*(L)$：能使低能力工人乐于选择分离的惟一教育水平(不论是在这里的随机情况中，还是前面讨论分离均衡时的确定情况中)为工人在完全信息下所选择的教

① 回顾第116页第3章脚注的内容：贝叶斯法则为 $P(A|B)=p(A,B)/p(B)$。要导出(4.2.8)，可将贝叶斯法则写为 $p(A,B)=p(B|A)\cdot p(A)$，于是得 $p(A|B)=p(B|A)\cdot p(A)/p(B)$。

育水平 $e^*(L)$。为理解这里的原因,假设低能力工人通过选择另外的 $e_L \neq e^*(L)$实现了分离,这种分离可带来收益 $y(L,e_L)-c(L,e_L)$,但选择 $e^*(L)$可得到的最小收益为 $y[L,e^*(L)]-c[L,e^*(L)]$(如果企业的推断 $\mu[H|e^*(L)]$大于0时还可能更高),而且对 $e^*(L)$的定义意味着对所有的 $e \neq e^*(L)$,都有 $y[L,e^*(L)]-c[L,e^*(L)]>y(L,e)-c(L,e)$,从而,不存在教育选择 $e_L \neq e^*(L)$,且使低能力工人有动机选择 $e_L$,从而实现分离。

为使低能力工人愿意随机选择分离结果 $e^*(L)$或混同结果 $e_h$,工资水平 $w(e_h)=w_h$ 必须使得工人在两者间的选择是无差异的:

$$w^*(L)-c[L,e^*(L)]=w_h-c(L,e_h) . \qquad (4.2.9)$$

然而,为使 $w_h$ 成为企业支付的均衡工资,据(4.2.1)和(4.2.8)可得

$$w_h=\frac{q}{q+(1-q)\pi}\cdot y(H,e_h)+\frac{(1-q)\pi}{q+(1-q)}\cdot y(L,e_h) . \quad (4.2.10)$$

对一个给定的 $e_h$ 值,如果(4.2.9)的结果 $w_h<y(H,e_h)$,则(4.2.10)可以确定满足杂合均衡条件的惟一 $\pi$ 值,这时低能力工人随机选择 $e^*(L)$或 $e_h$;而如果 $w_h>y(H,e_h)$,则对这样的 $e_h$ 值,不存在杂合均衡。

图 4.2.9 间接表示出特定的 $e_h$ 值,及与之相应的 $\pi$ 值。给定 $e_h$,工资

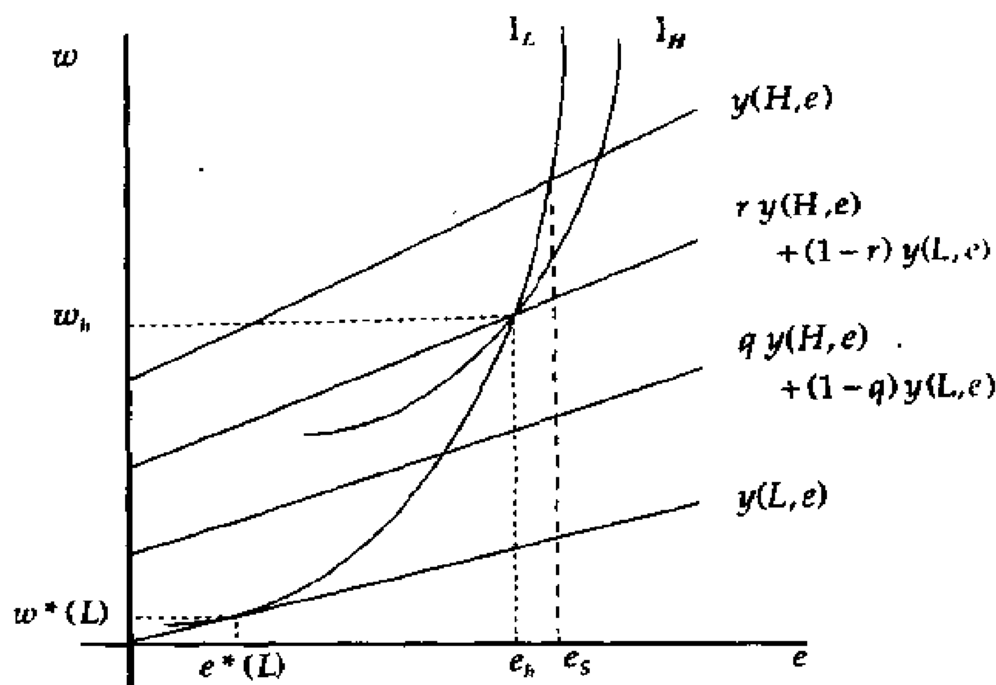



图 4.2.9

$w_h$ 为(4.2.9)的解,于是点($e_h$, $w_h$)处于低能力工人通过点[$e^*(L)$, $w^*(L)$]的无差异曲线上。给定 $w_h < y(H, e_h)$,概率 $r$ 满足 $r \cdot y(H, e_h) + (1-r) \cdot y(L, e_h) = w_h$,这一概率即为企业的均衡推断 $\mu(H \mid e_h)$,于是据(4.2.8)得 $\pi = q(1-r)/r(1-q)$。此图还说明,约束条件 $w_h < y(H, e_h)$ 等同于 $e_h < e_s$,其中 $e_s$ 为图 4.2.8 的分离均衡中高能力工人选择的教育水平。事实上,随 $e_h$ 趋于 $e_s$, $r$ 趋于 1,于是 $\pi$ 趋于 0。因而,图 4.2.8 描述的分离均衡为这里考虑的杂合均衡的极限情况。

为完成对图 4.2.9 中杂合精炼贝叶斯均衡的描述,令企业的推断为:如果 $e < e_h$,工人是低能力的,否则是高能力的概率为 $r$,低能力的概率为 $1-r$:

$$\mu(H \mid e) = \begin{cases} 0 & \text{当 } e < e_h \\ r & \text{当 } e \geq e_h \end{cases}.$$

于是,企业的战略为

$$w(e) = \begin{cases} y(L, e) & \text{当 } e < e_h \\ r \cdot y(H, e) + (1-r) \cdot y(L, e) & \text{当 } e \geq e_h \end{cases}.$$

现在,只余下检验工人的战略($e(L)$以 $\pi$ 的概率为 $e_h$,以 $1-\pi$ 的概率为 $e^*(L)$;$e(H) = e_h$)是企业战略的最优反应。对低能力工人来讲,最优的 $e < e_h$ 为 $e^*(L)$,并且最优的 $e \geq e_h$ 为 $e_h$。对高能力工人来讲,$e_h$ 要优于任何其他选择。

### 4.2.C　公司投资和资本结构

考虑一个企业家已经注册了一个公司,但需要对外融资以投入一个颇显吸引力的项目。企业家有关于已经存在公司盈利能力的私人信息,但是新项目的收益却无法从原企业收益中分出——所能观测到的,只有企业总的利润水平。(我们也可以允许企业家对新项目的盈利能力掌握私人信息,但这却会带来不必要的复杂)。假设企业向潜在投资者承诺一定的股权份额,以换取必要的资金。那么,在什么条件下应该上马新项目,并且承诺的股权份额应该为多少?

为把上述问题转化为一个信号博弈,假设现存公司的利润要么高,要么低:$\pi = L$ 或 $H$,这里 $H > L > 0$。为表现出新项目是具有吸引力的,假设需要的投资为 $I$,将得到的收益为 $R$,潜在投资者其他方式投资的回报为 $r$,且 $R > I(1+r)$。则博弈的时间顺序和收益情况如下:

1. 自然决定现存公司的利润状况,$\pi = L$ 的概率为 $p$;

2. 企业家了解到 $\pi$,其后向潜在投资者承诺一定的股权益份额 $s$,这里

$0 \leqslant s \leqslant 1$;

3. 投资者观测到 $s$(但不能观测到 $\pi$),然后决定是接受还是拒绝这一要约;
4. 如果投资者拒绝要约,则投资者的收益为 $I(1+r)$,企业家的收益为 $\pi$,如果投资者接受,则投资者的收益为 $s(\pi+R)$,企业家的收益为 $(1-s)(\pi+R)$。

迈尔斯和迈卢夫(1984)分析的模型即属此类,尽管他们考虑的是一大公司(有股东和经理)而非私人企业(惟一的所有者充任公司经理)。他们讨论了有关股东利益如何影响经理效用的不同假定;迪布维格和森德(Zender)(1991)推导出股东和经理人员间的最优合约安排。

这是一个非常简单的信号博弈,从以下两个方面可以看出:接收者行动的可行集非常有限,发送者的可选信号稍微多一些,但很多是无效率的(随后我们将会看到)。假设在接收到要约 $s$ 之后,投资者推断 $\pi = L$ 的概率为 $q$。则投资者将接受 $s$,当且仅当

$$s[qL+(1-q)H+R] \geqslant I(1+r) . \qquad (4.2.11)$$

对企业家来讲,假设现存公司的利润为 $\pi$,并考虑是愿意以股权份额 $s$ 为代价获得融资,还是放弃这一项目。当且仅当下式成立时,前者更为可取

$$s \leqslant \frac{R}{\pi+R} . \qquad (4.2.12)$$

在混同精炼贝叶斯均衡中,投资者在接收到均衡要约之后的推断必须为 $q=p$。由于立项约束(4.2.12)在 $\pi=H$ 时比 $\pi=L$ 时更难以满足,将(4.2.11)和(4.2.12)联合起来意味着混同均衡只有下式成立时才存在:

$$\frac{I(1+r)}{pL+(1-p)H+R} \leqslant \frac{R}{H+R} . \qquad (4.2.13)$$

如果 $p$ 足够接近于 0,(4.2.13)成立,因为 $R > I(1+r)$。不过,如果 $p$ 足够接近于 1,则(4.2.13)成立,只有

$$R - I(1+r) \geqslant \frac{I(1+r)H}{R} L . \qquad (4.2.14)$$

从直观理解,混同均衡的困难之处在于,高利润类型必须补贴低利润类型:在(4.2.11)中令 $q=p$,可得 $s \geqslant I(1+r)/[pL+(1-p)H+R]$,而如果投资者确信 $\pi=H$(即 $q=0$),则他将接受更小的权益份额 $s \geqslant I(1+r)/(H+R)$。混同均衡中所要求的更大的权益份额对高利润企业来讲是非常昂贵的——也许昂贵到使高利润企业更愿意放弃这一新项目。我们的分析证明,只有 $p$ 足够接近于 0 时才存在混同均衡,这时可减少补贴成本;或者如果(4.2.14)成立,这时新项目产生的利润足以超出补贴成本。

如果(4.2.13)不成立,则不存在混同均衡,然而总是存在分离均衡。低利润类型的要约为 $s = I(1+r)/(L+R)$,投资者接受;高利润类型的要约为 $s < I(1+r)/(H+R)$,被投资者拒绝。在这样的均衡中,投资水平无效率地降低了:新项目肯定是可以带来利润的,但高利润类型的企业却放弃了投资。这一均衡也说明了发送者的可行信号集无效率的情况:高利润类型的企业没有办法把自己区分出来——对高利润类型有吸引力的融资条件对低利润类型甚至更具有吸引力。正如迈尔斯和迈卢夫所观察的结果,模型表现出的内在机制迫使企业寻求债务融资或寻找内部资金渠道。

最后,我们简单考虑企业家在选择股权融资的同时,还可以选择债务融资的情况。假设投资者接受了债务合同 $D$,如果企业家没有宣布破产则投资者的收益为 $D$,企业家的收益为 $\pi + R - D$;如果企业家破产,投资者的收益为 $\pi + R$,企业家的收益为 0。由于 $L > 0$,则总是存在混同均衡——两种利润类型的债务合同均为 $D = I(1+r)$,并且为投资者接受。不过,如果 $L$ 为足够大的负数,使得 $R + L < I(1+r)$,则低利润类型不能偿还此项债务,于是投资者也不会接受此项合同。如果 $L$ 和 $H$ 代表期望利润(而非确定的利润)时,也可以得到相似的结论。假设类型 $\pi$ 的含义为现存企业的利润有 1/2 的概率为 $\pi + K$,1/2 的概率为 $\pi - K$,这时如果 $L - K + R < I(1+r)$,则低利润类型将有 1/2 的概率不能清偿债务 $D = I(1+r)$,于是投资者不会接受合约。

## 4.2.D　货币政策

本节我们继续讨论第 2.3.E 节分析的两阶段重复货币政策博弈,只是加入了私人信息。和斯彭斯的模型相似,博弈存在许多混同、杂合以及分离精炼贝叶斯均衡。由于第 4.2.B 节我们已详细讨论过这些均衡,这里只简要勾勒一个框架。参见维克斯(1986)对相似的两阶段分析的详细讨论,以及巴罗(1986)的多阶段声誉模型。

第 2.3.E 中讲到的货币当局的单阶段收益为

$$W(\pi, \pi^e) = -c\pi^2 - [(b-1)y^* + d(\pi - \pi^e)]^2,$$

其中 $\pi$ 为真实的通货膨胀,$\pi^e$ 为雇主们的期望通货膨胀,$y^*$ 为有效率的产出水平。对雇主们来讲,单阶段的收益为 $-(\pi, \pi^e)^2$。在我们的两阶段模型中,每一参与者的收益都是各参与者单阶段收益的简单相加,$W(\pi_1, \pi_1^e) + W(\pi_2 + \pi_2^e)$ 和 $-(\pi_1, \pi_1^e)^2 - (\pi_2 - \pi_2^e)^2$,其中 $\pi_t$ 为阶段 $t$ 的真实通货膨胀,$\pi_t^e$ 为雇主们(在 $t$ 阶段开始时)对阶段 $t$ 通货膨胀的预期。

收益函数 $W(\pi, \pi^e)$ 中的参数 $c$ 反映了货币当局在零通胀和有效率产

出两个目标之间的替代,在第 2.3.E 节中这一参数为共同知识,现在我们假定这一参数只是货币当局的私人信息 $c=S=$ 或 $W$(分别表示对治理通货膨胀的态度强硬(strong)或软弱 (weak)),这里 $S>w>0$,从而两阶段博弈的时间顺序如下:

1. 自然赋予货币当局某一类型 $c$,$c=W$ 的概率为 $p$。
2. 雇主们形成他们对第一期通货膨胀的预期 $\pi_1^e$。
3. 货币当局观测到 $\pi_1^e$,其后选择第一期的真实通货膨胀 $\pi_1$。
4. 雇主们观测到 $\pi_1$(而不能观测到 $c$),然后形成他们对第二期通货膨胀的预期 $\pi_2^e$。
5. 货币当局观测到 $\pi_2^e$,然后选择第二期的真实通货膨胀。

正如第 4.2.A 节已经注明的,从这一两阶段货币政策博弈当中可以抽象出单阶段信号博弈。发送者的信号为货币当局对第一期通货膨胀水平的选择 $\pi_1$,接收者的行动为雇主们对第二期通货膨胀的预期 $\pi_2^e$。雇主们第一期通货膨胀的预期以及货币当局第二期对真实通货膨胀水平的选择分别为信号博弈之前及之后的行动。

回顾在单阶段问题(即第 2.3.E 节分析的重复博弈中的阶段博弈)中,给定雇主们的预期 $\pi^e$,货币当局对 $\pi$ 的最优选择为

$$\pi^*(\pi^e)=\frac{d}{c+d^2}[(1-b)y^*+d\pi^e] .$$

同样的论证结论意味着如果货币当局的类型为 $c$,给定预期 $\pi_2^e$,则其对 $\pi_2$ 的最优选择为

$$\frac{d}{c+d^2}[(1-b)y^*+d\pi_2^e]\equiv\pi_2^*(\pi_2^e,c) .$$

预测到这一点,如果雇主们推断 $c=W$ 的概率为 $q$,并据此开始第二阶段的博弈,则他们将选择 $\pi_2^e(q)$,以使下式最大化

$$-q[\pi_2^*(\pi_2^e,W)-\pi_2^e]^2-(1-q)[\pi_2^*(\pi_2^e,S)-\pi_2^e]^2 . \qquad (4.2.15)$$

在混同均衡中,两种类型所选择的第一期通货膨胀相同,不妨以 $\pi^*$ 表示,于是,雇主们第一期的预期为 $\pi_1^e=\pi^*$。在均衡路径上,雇主们推断 $c=W$ 的概率为 $p$,开始第二阶段的博弈,并形成预期 $\pi_2^e(p)$,则类型为 $c$ 的货币当局对给定的预期,选择最优的第二期通货膨胀水平。具体而言即为 $\pi_2^*[\pi_2^e(p),c]$,如此博弈结束。为完成对这样一个均衡的描述,还必须(同往常一样)明确接收者处于均衡路径之外的推断,根据(4.2.15)计算相应的均衡路径之外的行为,并检验这些均衡路径之外的行为对任何类型的发送者,都不会使他有动机偏离均衡。

在分离均衡中，不同类型选择的第一期通货膨胀水平不同，分别以 $\pi_W$ 和 $\pi_s$ 表示，于是雇主们第一阶段的预期为 $\pi_1^e = p\pi_W + (1-q)\pi_S$。观测到 $\pi_W$ 之后，雇主们推断 $c = W$ 并开始第二阶段，形成预期 $\pi_2^e(1)$；类似地，观测到 $\pi_S$ 形成的预期为 $\pi_2^e(0)$。在均衡中，软弱类型选择 $\pi_2^*[\pi_2^e(1), W]$，强硬类型则选择 $\pi_2^*[\pi_2^e(0), S]$，博弈结束。为完成对这一均衡的描述，不仅要明确接收者均衡路径之外的推断和行动，并检验没有任何类型的发送者将有动机偏离，这和前面相同；而且还要检验两种类型都没有动机去伪装另外类型的行为。在这一博弈中，软弱类型可能会在第一阶段被吸引选择 $\pi_S$，从而诱使雇主们第二阶段的预期为 $\pi_2^e(0)$，并在其后选择 $\pi_2^*[\pi_2^e(0), W]$ 使博弈结束。这是由于即使 $\pi_S$ 较低，以至于软弱类型有些不情愿，但都会使 $\pi_2^e(0)$ 非常之低，使之可从第二阶段的预料外通货膨胀 $\pi_2^*[\pi_2^e(0), W] - \pi_2^e(0)$ 之中获得巨大收益。在分离均衡中，强硬类型选择的第一期通货膨胀水平必须足够低，使得软弱类型没有动力去伪装成强硬类型，即使在第二阶段可获得预料外通货膨胀的好处。对许多参数的值，这一约束使得 $\pi_S$ 低于强硬类型在完全信息下将会选择的通货膨胀水平，正如在斯彭斯模型的分离均衡中，高能力工人将过度投资于教育一样。

## 4.3 精炼贝叶斯均衡的其他应用

### 4.3.A 空谈博弈

空谈博弈类似于信号博弈，但在空谈博弈中，发送者的信号只是口头表态——既不需要成本，亦没有约束作用，也无法查证构成任何义务。这种口头表态在斯彭斯的信号博弈中是无法得到有用结果的：一个工人简单宣称“我的能力很高”是不可信的。不过在其他情况下，空谈也可能会有效果。作为一个简单的例子，考虑很可能发生的一种情况“嗨！ 小心那辆公共汽车！”。在经济学的应用中，斯坦（Stein, 1989）证明联储对政策的表态能起到一定作用，但又不能太精确计算。马修斯（Matthew, 1989）研究了总统使用否决权的威胁如何影响到议会对法案的表决。除分析特定环境中空谈博弈的效果之外，我们也许更关心如何设计一个环境，可以利用空谈博弈的优点。为此，奥斯汀-史密斯（Austen-Smith, 1990）证明在某些机制下，自利的立法者之间相互争论，可以提高最终法案的社会价值，法雷尔和吉本斯

(1991)证明在特定机制下,工会可以提高社会福利(尽管会带来第 2.1.C 节描述的就业扭曲),因为它可以促进工人和管理层之间的相互沟通。

空谈在斯彭斯的模型中起不到任何作用,是因为所有类型的发送者对接收者可能的行为有着相同的偏好:所有工人都希望较高的工资,而不论其实际能力如何。为了理解为什么发送者偏好的一致性会影响空谈的作用(无论是在斯彭斯模型还是在更为一般的情况下),假设存在一个纯战略均衡,其中部分类型的发送者 $T_1$ 选择一种信号 $m_1$,而另外类型的发送者 $T_2$ 选择另外一种信号 $m_2$(每个 $T_i$ 可以只包含一个类型,如在分离均衡中的情况;也可以包含多种类型,如在部分混同均衡中)。在均衡时,接收者将认定 $m_i$ 是由 $T_i$ 发出的,并在此推断下选择最优行动;我们用 $a_i$ 表示这一行动。由于所有类型的发送者对行动都有相同的偏好,如果某一类型 $B$(比方说)在 $a_1$ 和 $a_2$ 之间更偏好 $a_1$,既然所有类型的偏好都一样,那么都会选择发送信号 $m_1$,而不会发送 $m_2$,从而破坏了前面假设的均衡。例如在斯彭斯模型中,如果一种空谈信号的结果是高工资,而另一种空谈信号的结果是低工资,则所有能力水平的工人都会选择前一种信号,于是就不可能存在一个空谈可以影响均衡的工资。

这样,要使空谈起到作用,一个必要条件是不同类型的发送者对接收者行为的偏好不同。第二个必要条件当然就是接收者基于发送者的不同类型,选择的最优行为不同(如果接收者的最优行为与发送者的类型无关,信号和空谈都毫无作用)。空谈发挥作用的第三个必要条件是接收者所偏好的行动不会完全遭到发送者的反对。为理解这一条件,假设当发送者的类型为低时,接收者偏好的行动为低;发送者类型为高时,接收者偏好的行动为高。如果低类型的发送者偏好的行动是低,高类型发送者偏好的行动是高,则交流得以进行;但如果发送者的偏好反过来,则交流就不能达成,因为发送者将会误导接收者。克劳福德和索贝尔(1982)分析了一个满足上述三个必要条件的抽象模型,并建立了两个直观结果:一般而言,当参与者之间的偏好排列更为接近时,通过空谈可能达成的交流就更多,但除非参与者偏好的排列是完全一致的,无法达到完美的交流。

前面提到的每一经济学应用——美联储的空谈、否决权的威胁、辩论中的信息交流,以及工会作用——都不只涉及到简单的空谈博弈,还要用到相应经济学领域更为复杂的模型。要分析这些应用的任何一种,都不仅要描述单纯的博弈,还需要用复杂的模型相配合,而这样又会转移我们的注意力,忽略空谈博弈本身的机制。所以,本节我们暂时采用与书中其余部分不一致的风格,只分析抽象的空谈博弈,而把应用作为进一步阅读的内容。

最简单空谈博弈的时间顺序与最简单信号博弈的时间顺序相同，只是收益情况不一致。

1. 自然从可行的类型集 $T=\{t_1,\cdots,t_I\}$ 中根据概率分布 $p(t_i)$ 赋予发送者某一类型 $t_i$，其中对所有 $i$，$p(t_i)>0$，且 $p(t_1)+\cdots+p(t_I)=1$；
2. 发送者观测到 $t_i$，然后从可行的信号集 $M\{m_1,\cdots,m_J\}$ 中选择一个信号 $m_j$；
3. 接收者观测到 $m_j$（而不能观测到 $t_i$），然后从可行的行动集 $A=\{a_1,\cdots,a_K\}$ 中选择一个行动 $a_k$；
4. 双方的收益分别由 $U_S(t_i,a_k)$ 和 $U_R(t_i,a_k)$ 给出。

此类空谈博弈的关键特征是，信号不论对发送者还是接收者的收益函数，都没有直接影响。信号能发挥作用的惟一途径是通过它所包含的信息：借助于改变接收者对发送者所属类型的推断，信号可以改变接收者的行动，从而对两个参与者的收益发生间接影响。由于可使用不同的语言交流同样的信息，不同的信号空间能够达到同样的结果。空谈的原则是什么话都可以说，但这反映在模型中就要求 $M$ 是一个非常庞大的集合。因此，我们假定 $M$ 中的元素（刚好）够用来说出需要表达的信息；也就是说，$M=T$。对本节的内容，这一假定与允许什么都可以说是等价的；但到第4.4节的内容（对精炼贝叶斯均衡的再精炼），就需要重新考虑这一假定了。

因为最简单的空谈博弈和信号博弈的时间顺序相同，对这两类博弈中精炼贝叶斯均衡的定义也是相同的：空谈博弈中的纯战略精炼贝叶斯均衡为满足信号要求（1）、（2R）、（2S）和（3）的一组战略 $m^*(t_i)$ 和 $a^*(m_j)$ 及推断 $\mu(t\,|\,m_j)$。尽管信号要求（2R）和（2S）中的收益函数 $U_S(t_i,m_j,a_k)$ 和 $U_R(t_i,m_j,a_k)$ 分别等价于这里的 $U_S(t_i,a_k)$ 和 $U_R(t_i,a_k)$，但信号博弈和空谈博弈的一个不同之处在于，后者总存在一个混同均衡。因为信号对发送者的收益没有任何直接影响，如果接收者将忽视任何信号，则混同就是发送者的最优反应；因为信号对接收者的收益没有任何直接影响，如果发送者选择混同，接收者的最优选择就是忽视任何信号。正式地，令 $a^*$ 表示接收者在混同均衡的最优行动，也就是说，$a^*$ 满足

$$\max_{a_k\in A}\sum_{t_i\in T_i}p(t_i)U_R(t_i,a_k)\ .$$

发送者选择任何混同战略，接收者对所有信号都维持先验概率推断 $p(t_i)$（不论是处于均衡路径之上还是之外），并对所有信号都选择行动 $a^*$ 是一个混同精炼贝叶斯均衡。从而空谈博弈中一个有意思的问题就是是否存在

非混同均衡。下面讨论的两个抽象空谈博弈分别说明了分离均衡和部分混同均衡存在的情况。

我们首先考虑两种类型、两种行动的例子：$T\{t_L, t_H\}$，$\text{prob}(t_L)=p$，$A=\{a_L, a_H\}$。我们也可以使用类似于图 4.2.1 中两类型、两信号、两行动的信号博弈描述这里空谈博弈的收益，但类型——行动组合$(t_i, a_k)$带来的收益与选择什么信号无关，于是我们又可以用图 4.3.1 描述收益情况。每一单元内的前一数值表示发送者的收益，后一数值表示接收者的收益，但此图并不是一个标准式博弈，而只是简单表示出在每一种类型——行动组合时双方参与者的收益。为满足前面所讨论空谈发挥作用的必要条件，我们对接收者的收益作了选择，使得当发送者类型为低$(t_L)$时，接收者偏好的行动为低$(a_L)$；类型为高时，偏好的行动亦为高。为体现第一个必要条件，假设两种类型的发送者对行动的偏好相同，例如 $x>z$ 且 $y>w$，于是两种类型在 $a_L$ 和 $a_H$ 中都偏好 $a_L$。则两种类型都希望能使接收者相信 $t=t_L$，于是接收者无法相信任何一方的话。在这一两类型、两行动博弈中，满足第一和第三个必要条件的惟一情况只有 $x\geqslant z$ 且 $y\leqslant w$——参与者的利益完全一致，可以理解为在给定发送者类型的情况下，双方参与者认为应该选择的行动是完全相同的。正式地，在此空谈博弈的分离精炼贝叶斯均衡中，发送者战略为$[m(t_L)=t_L, m(t_H)=t_H]$，接收者的推断为 $\mu(t_L|t_L)=1$ 且 $\mu(t_L|t_H)=0$，并且接收者的战略为$[a(t_L)=a_L, a(t_H)=a_H]$。为使上述战略和推断成为均衡结果，每一类型的发送者 $t_i$ 必须偏好于说出真实情况，从而使接收者选择行动 $a_i$，而不愿意说谎以诱使接收者选择行动 $a_j$。所以，当且仅当 $x\geqslant z$ 且 $y\leqslant w$ 时，才存在分离均衡。

| | $t_L$ | $t_H$ |
|---|---|---|
| $a_L$ | $x, 1$ | $y, 0$ |
| $a_H$ | $z, 0$ | $W, 1$ |

图 4.3.1

我们的第二个例子是克劳福德和索贝尔模型的一种特殊情况。现在类型、信号和行动空间都是连续的：发送者的类型在 0 到 1 的区间内均匀分布（正式地，$T=[0,1]$且对所有的 $t\in T$，$p(T)=1$）；信号空间即为类型空间$(M=T)$；行动空间为 0 到 1 之间的区间$(A=[0,1])$。接收者的收益函数为 $U_R(t,a)=-(a-t)^2$，发送者的收益函数 $U_S(t,a)=-[a-(t+b)]^2$，从而发送者的类型为 $t$ 时，接收者的最优行动为 $a=t$，但对发送者来讲，最优行为都是 $a=t+b$。也就是说，不同类型的发送者对接收者行为的

偏好不同(具体地讲,较高的类型偏好的行动也较高),并且参与者双方的偏好并不是完全对抗性的(具体地讲,参数 $b>0$ 衡量参与者偏好的一致性——当 $b$ 更接近于 0 时,参与者的利益更为一致)。

克劳福德和索贝尔证明这一模型(以及与之相关的许多类型的模型)所有的精炼贝叶斯均衡等价于以下形式的部分混同均衡:类型空间被分割为 $n$ 个子区间,$[(0,x_1),[x_1,x_2),\cdots,[x_{n-1},1],\cdots$;属于某一给定区间的所有类型都选择同样的信号,但属于不同区间的类型所选择的信号也不相同。前面已经提到,混同均衡($n=1$)总是存在。我们将证明,给定偏好程度参数 $b$,存在一个能够在均衡中出现的区间数(或称"段数")的最大值,用 $n^*(b)$ 表示,并且对每一个 $n=1,2,\cdots,n^*(b)$ 都存在部分混同均衡。随 $b$ 的降低,可使 $n^*(b)$ 提高——从这一点来说,当参与者的偏好分布更为一致时,通过空谈就可以达到更好的沟通。同时,对所有 $b>0$,$n^*(b)$ 都是有限值;但当 $b$ 趋于 0 时,$n^*(b)$ 趋于无穷大——只有当参与者的偏好完全一致时,才可能达到完全交流。

本节的最后,我们分析上述部分混同均衡的特征,首先用两段均衡($n=2$)进行说明。假设在区间$[0,x_1)$的所有类型选择一种信号,而属于区间$[x_1,1]$的选择另一种信号。接收到属于区间$[0,x_1)$的类型发送的信号后,接收者将推断发送者的类型在$[0,x_1)$上均匀分布,于是接收者的最优行动将是 $x_1/2$;类似地,接收到属于区间$[x_1,1]$的类型发送的信号后,接收者的最优行动将为$(x_1+1)/2$。为使$[0,x_1]$中的类型愿意选择他们的信号,必须满足区间中的所有类型和$(x_1+1)/2$ 相比,更偏好 $x_1/2$;类似地,所有 $x_1$ 之上的类型在$(x_1+1)/2$ 和 $x_1/2$ 中,更偏好$(x_1+1)/2$。

因为发送者的偏好在对其而言的最优行动的两侧是对称的,如果两个行动的中点超过了对他所属类型而言的最优行动 $t+b$(如图 4.3.2 所示),

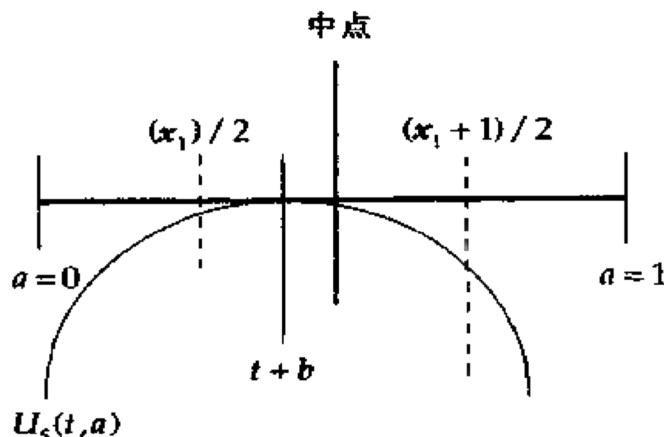



图 4.3.2

和$(x_1+1)/2$相比，他会更偏好$x_1/2$；但如果$t+b$超过了中点，则更偏好$(x_1+1)/2$。那么，要使两步均衡存在，$x_1$所表示的类型$t_1$，其最优行动必须恰好等于两个行动的中点：

$$x_1+b=\frac{1}{2}\left[\frac{x_1}{2}+\frac{x_1+1}{2}\right] \quad 或 \quad x_1=(1/2)-2b$$

由于类型空间为$T=[0,1]$，$x_1$又必须为正，于是两段均衡只有当$b<1/4$时存在；因为$b\geqslant 1/4$时，参与者的偏好过于不一致，以致于这种非常有限的交流也无法达成。

为完成对这一两步均衡的讨论，我们再来看处于均衡路径之外的情况。克劳福德和索贝尔通过指定发送者的(混合)战略，使得不存在均衡之外的信号：所有$t<x_1$的类型根据$[0,x]$上的均匀分布随机选择一个信号；所有$t\geqslant x_1$的类型根据$[x,1]$上的均匀分布随机选择一个信号。由于我们假定$M=T$，均衡中也就不存在肯定不会被选择的信号，于是接收者在所有可能信号之后的推断由信号要求3决定：观测到任意$[0,x_1]$间的信号后，接收者的推断为$t$在区间$[0,x_1]$均匀分布；观测到任意$[x_1,1]$间的信号后，接收者的推断为$t$在区间$[x_1,1]$均匀分布(在发送者混合战略中使用均匀分布完全不同于对发送者类型均匀分布的假定；发送者的混合战略也可以运用相同区间上其他任何严格正的概率分布)。作为对克劳福德和索贝尔方法的一种变化，我们可以指定发送者的一个纯战略，同时选择接收者对均衡路径之外信号的合适的推断。例如，令发送者的战略为所有$t<x_1$的类型选择信号0，且所有$t\geqslant x_1$的类型选择信号$x_1$；同时令接收者观测到$[0,x_1]$间的信号时推断$t$在$[0,x_1]$区间服从均匀分布，观测到$[x_1,1]$间的信号时推断$t$在区间服从均匀分布。

为描述一个$n$段均衡，我们重复应用下面从两段均衡中观测到的结果：上面的一段$[x_1,1]$比下面的一段$[0,x_1]$要长$4b$。这一观测结果可根据以下事实得出：给定发送者的类型$(t)$，对发送者而言的最优行动$(t+b)$比接收者的最优行动$(t)$高出$b$。那么，如果相邻两段的长度相等，两段之间的临界类型(两段均衡中的$x_1$)就会严格偏好于选择与上面一段相对应的信号；事实上，稍低于临界值的类型也会有相同的偏好。使临界类型在两段之间没有差别的惟一方法(并从而使高于和低于临界值的类型严格偏好各自的信号)就是适当地使上面一段较下面一段稍长一些，具体证明如下：

如果$[x_{k-1},x_k]$段的长为$c$(即$x_k-x_{k-1}=c$)，则接收者与此段相应的最优行动(具体地讲，即$(x_k+x_{k-1})/2$)要比临界类型$x_k$的最优行动(具体地讲，为$x_k+b$)低$(c/2)+b$。为使临界类型$x_k$在相邻两段$[x_{k-1},x_k]$和

$[x_k, x_{k+1}]$间无差异，接收者与后面一段相应的最优行动必须比 $x_k$ 的最优行动高出$(c/2)+b$：

$$\frac{x_{k+1}+x_k}{2}-(x_k+b)=\frac{c}{2}+b \quad 或 \quad x_{k+1}-x_k=c+4b \ .$$

从而证明了每一段都比下一段长出 $4b$。

在 $n$ 段均衡中，如果第一段的长度为 $d$，则第二段的长必须为 $d+4b$，第三段的长为 $d+8b$，如此等等。第 $n$ 段必须恰好于 $t=1$ 处结束，于是必定有：

$$d+(d+4b)+\cdots+[d+(n-1)4b]=1 \ .$$

运用等差数列求和公式 $1+2+\cdots+(n-1)=n(n-1)/2$，我们得到

$$n\cdot d+n(n-1)\cdot 2b=1 \ . \qquad (4.3.1)$$

给定满足 $n(n-1)\cdot 2b<1$ 的任意 $n$，都存在一个 $d$ 的值满足(4.3.1)。也就是说，对 $n(n-1)\cdot 2b<1$ 的任意 $n$，都存在一个 $n$ 段部分混同均衡，并且其第一段的长度为满足(4.3.1)式的相应的 $d$ 值。由于第一段的长度必须是正的，这一均衡中，分段的最大可能数，$n^*(b)$，为使 $n(n-1)\cdot 2b<1$ 的最大的 $n$ 值。运用二次方程求解的公式可得 $n^*(b)$为小于$[1+\sqrt{1+(2/b)}]/2$ 的最大的整数。它与在两段均衡中推导的结论是一致的，即当 $b\geqslant 1/4$ 时，$n^*(b)=1$：如果参与者间的偏好过于不一致，则不可能发生交流。还有就是前面讲过的，$n^*(b)$随 $b$ 的递减而增大，但只有当 $b$ 趋于0时才趋于无穷：当参与者的偏好更为一致时，会发生更高程度的交流，但只有在参与者的偏好完全一致时，才可能达成完全交流。

### 4.3.B　非对称信息下的序贯谈判

考虑企业与工会就工资问题进行谈判的情况。为简化分析，假定雇佣的工人数是一定的。工会的保留工资(reservation wage)(即工会成员不受雇于该企业时仍可获得的收入)为 $w_r$。企业的利润用 $\pi$ 表示，服从区间$[\pi_L, \pi_H]$上的均匀分布，但 $\pi$ 的真实值却为企业的私人信息，例如企业在新产品计划阶段就掌握一些普通工人不知道的知识。我们假定 $w_r=\pi_L=0$，以使表示更为简明。

谈判博弈最多持续两个时期。在第一个时期，工会给出工资要价 $w_1$，如果企业接收该要价，则博弈结束：工会的收益为 $w_1$，企业收益为 $\pi-w_1$(上述收益为参与双方在商定的整个合同期间——一般为三年——工资与(净)利润的现值)。如果企业拒绝要价，博弈进入第二时期，工会给出第二个工资要价 $w_2$。如果企业接受这一要价则参与双方的收益现值分别为

(按第一时期的口径):工会 $\delta w_2$,企业 $\delta(\pi - w_2)$,这里的 $\delta$ 既反映了折现因素,又体现出因谈判延长使有效的合同期较第一期变短而带来的收益减少。如果企业拒绝工人的第二个要价,则博弈结束,双方参与者的收益均为0。在更为现实的模型中,可能会允许谈判一直进行下去,直至达成一致,或者在长时间的罢工之后,强制双方遵守有约束力的仲裁结果,参见索贝尔和高桥(1983)及习题 4.12 中对无限情况的分析。

在这一模型中,定义及推导精炼贝叶斯均衡稍微有些复杂,但最终结果却很简单,又十分直观,因此我们首先给出此博弈惟一的精炼贝叶斯均衡,并由此开始进行分析。

- 工会第一时期的工资要价为

$$w^* = \frac{(2-\delta)^2}{2(4-3\delta)}\pi_H .$$

- 如果企业利润 $\pi$ 超出

$$\pi_1^* = \frac{2w_1}{2-\delta} = \frac{2-\delta}{4-3\delta}\pi_H,$$

则企业接受 $w_1^*$;否则,企业拒绝 $w_1^*$。

- 如果第一期的要价被拒绝,工会修校其对企业利润的推断:工会推断 $\pi$ 服从$[0,\pi_1^*]$区间的均匀分布。
- 工会第二期的工资要价(在 $w_1^*$ 被拒绝的条件下)为

$$w_2^* = \frac{\pi_1^*}{2} = \frac{2-\delta}{2(4-3\delta)}\pi_H < w_1^*,$$

- 如果企业利润 $\pi$ 高于 $w_2^*$,则企业接受要价,否则便拒绝。

也就是说,在每一期,高利润企业接受工会的要价,而低利润企业拒绝,并且工会第二期的推断反映出高利润企业将会接受第一期要价的事实。(请注意,这里用词方面的细微变化,我们既可以指一家企业有许多可能的利润类型,有可以指多家企业各有不同的利润水平。)在均衡条件下,低利润企业忍受一个时期的罢工,以降低工会第二期的工资要价。不过,利润非常低的企业发现,即使第二期降低了的工资要价仍然过高,无法接受,便再次拒绝。

以上我们描述了参与者的战略及推断,下面我们定义博弈的精炼贝叶斯均衡。图 4.3.3 提供了简化后博弈的扩展式表述:只有两个 $\pi$ 的值($\pi_L$ 和 $\pi_H$),且工会的工资要价也只有两种可能($w_L$ 和 $w_H$)。

在这一简化后的博弈中,工会有三个轮到它行动的信息集,所以工会的战略也包含三个工资要价:第一期的要价 $w_1$ 和两个第二期的要价:在 $w_1$

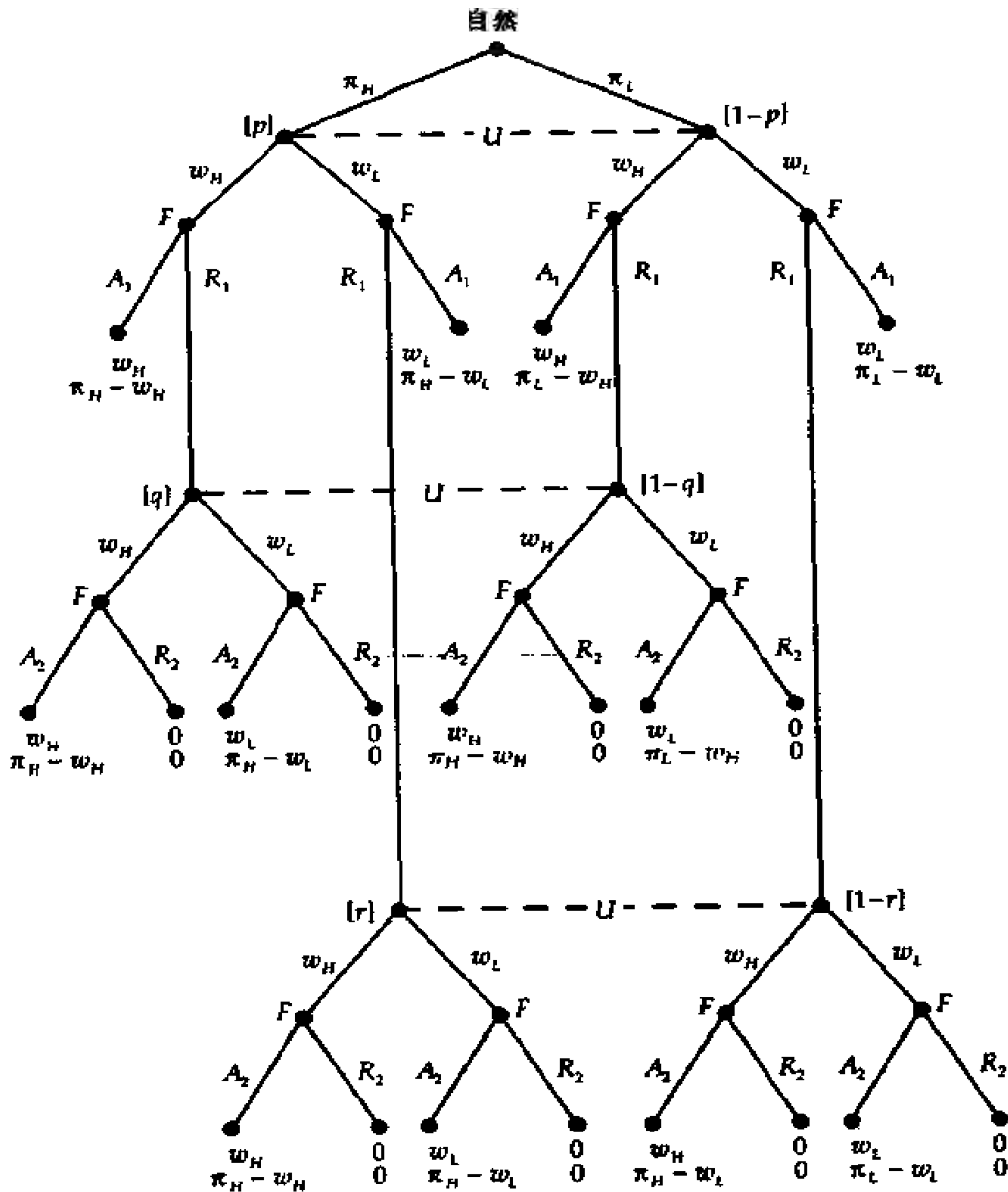



图 4.3.3

$= w_H$ 被拒绝后的 $w_2$ 及在 $w_1 = w_L$ 被拒绝后的 $w_2$。这三个行动在三个非单节信息集进行，工会在其中的推断分别表示为$(p, 1-p)$、$(q, 1-q)$，及$(r, 1-r)$。在完整的博弈(而非像 4.3.3 所示的简化后博弈)中，工会的一个战略是第一期的要价 $w_1$ 和第二期的要价函数 $w_2(w_1)$，该函数表示在每一种可能的要价 $w_1$ 被拒绝后的 $w_2$。这些行动都发生于非单节的信息

集,对工会可能提出的每一个不同的第一期工资要价都有一个第二期的信息集(于是,这样的信息集是连续存在的,而不像图 4.3.3 中只有两个)。在第一期惟一的信息集以及第二期连续信息集中,针对每一可能的 $\pi$ 值都有一个决策结(于是,这样的决策结也是连续的,而非图 4.3.3 中只有两个)。在每一信息集中,工会的推断为这些决策结的概率分布。在完整的博弈中,我们用 $\mu_1(\pi)$表示工会第一期的推断,用 $\mu_2(\pi|w_1)$表示(第一期要价 $w_1$ 被拒绝后)工会第二期的推断。

企业的一个战略包含了两个决策(在简化的和完整的博弈中都是一样的)。如果企业的利润水平为 $\pi$ 时,愿意接受第一期的要价 $w_1$,令 $A_1(w_1|\pi)$等于 1;如果企业利润水平为 $\pi$ 并将拒绝 $w_1$ 时,则等于 0。类似地,如果企业利润为 $\pi$,且第一期的要价为 $w_1$,企业愿意接受第二期的要价 $w_2$,令 $A_2(w_2|\pi,w_1)$等于 1,相同条件下企业拒绝 $w_2$,则令 $A_2(w_2|\pi,w_1)$等于 0。企业的一个战略为一对函数$[A_1(w_1|\pi),A_2(w_2|\pi,w_1)]$。由于在博弈的全过程中企业都有完全信息,其推断也就不必讨论了。

如果战略$[w_1,w_2(w_1)]$和$[A_1(w_1|\pi),A_2(w_2|\pi,w_1]$以及推断$[\mu_1(\pi),\mu_2(\pi/w_1)]$满足第 4.1 节给出的要求 2、3、4,则构成一个精炼贝叶斯均衡(只要工会的推断存在,就满足要求 1),我们将证明博弈存在惟一的精炼贝叶斯均衡。论证最简单的步骤是将要求 2 用于企业第二阶段的决策 $A_2(w_2|\pi,w_1)$:由于它是博弈的最后一步行动,企业的最优决策为当且仅当 $\pi\geqslant w_2$ 时,接受 $w_2$,而与 $w_1$ 的大小无关。确定了企业战略的这一部分,再把要求 2 用于工会第二期对工资的要价就十分简单了:对给定的工会的推断 $\mu_2(\pi|w_1)$和企业随后的战略 $A_2(w_2|\pi,w_1)$,$w_2$ 应使工会的期望收益最大化。论证比较困难的部分则在于确定推断 $\mu_2(\pi|w_1)$,方法步骤如下:

开始时,我们先暂时考虑如下的单期谈判问题(在后面我们将把这一问题的结果作为两期问题中第二期的解)。在单期问题中,假设工会的推断为企业利润水平服从$[0,\pi_1]$区间的均匀分布,这里暂时令 $\pi_1$ 是任意值。如果工会要价 $w$ 则企业的最优反应是十分明显的:当且仅当 $\pi>w$ 时接受 $w$。那么,工会的问题就可以表示为:

$$\max_w w\cdot \text{Prob}\{企业接受\ w\}+0\cdot \text{Prob}\{企业拒绝\ w\}\ .$$

这里对有意义的工资要价(具体地说,$0\leqslant w\leqslant\pi_1$)Prob{企业接受 $w$} $=(\pi_1-w)/\pi_1$。最优的工资要价则为 $w^*(\pi_1)=\pi_1/2$。

现在我们(永远地)回到两期问题。首先我们证明,对任意值的 $w_1$ 和

$w_2$，如果工会第一期的要价为 $w_1$，并且企业希望其在第二期的要价为 $w_2$，则所有利润足够高的企业将会接受 $w_1$，而其他情况下拒绝 $w_1$。企业接受 $w_1$ 可得的收益为 $\pi - w_1$，拒绝 $w_1$ 但接受 $w_2$ 的收益为 $\delta(\pi - w_2)$，两个要价都拒绝的收益为 0，从而当 $\pi > w_1 > \delta(\pi - w_2)$ 或

$$\pi > \frac{w_1 - \delta w_2}{1 - \delta} \equiv \pi^*(w_1, w_2)$$

时，和 $w_2$ 相比，企业更偏好接受 $w_1$，且当 $\pi - w_1 > 0$ 时，和两个要价都拒绝相比，企业更偏好接受 $w_1$。也就是说，对任意值的 $w_1$ 和 $w_2$，$\pi > \max\{\pi^*(w_1, w_2), w_1\}$ 的企业将接受 $w_1$，且 $\pi < \max\{\pi^*(w_1, w_2), w_1\}$ 的企业将拒绝 $w_1$。由于要求 2 限定了对给定的参与者的后续的战略，企业应该选择最优行动，我们可以对任意值的 $w_1$ 导出 $A_1(w_1|\pi)$：$\pi > \max\{\pi^*(w_1, w_2), w_1\}$ 的企业将接受 $w_1$，且 $\pi < \max\{\pi^*(w_1, w_2), w_1\}$ 的企业将拒绝 $w_1$，这里的 $w_2$ 为工会第二期的工资要价 $w_2(w_1)$。

现在我们可以推导 $\mu_2(\pi/w_1)$，在第一期要价 $w_1$ 被拒绝工会进入第二期信息集时持有的推断。要求 4 意味着正确的推断应该为 $\pi$ 服从 $[0, \pi(w_1)]$ 区间的均匀分布，这里的 $\pi(w_1)$ 表示企业对接受 $w_1$ 和拒绝 $w_1$ 但接受工会第二期的最优要价——$w^*(\pi(w_1)) = \pi(w_1)/2$ 无差异时的 $\pi$ 值，第二期的最优要价为前面讨论单期问题时的结果。为理解这一结果，回顾要求 4 限定工会的推断应该由贝叶斯法则和企业的战略所决定。那么，给定刚才推出的企业战略的开始部分 $A_1(w_1|\pi)$，工会的推断必须是，如果进入到第二期，企业的类型服从 $[0, \pi_1]$ 区间上的均匀分布，其中 $\pi_1 = \max\{\pi^*(w_1, w_2), w_1\}$ 且 $w_2$ 为工会第二期的工资要价 $w_2(w_1)$。给定这样的推断，工会最优的第二期要价一定是 $w^*(\pi_1) = \pi(w_1)/2$，据此可以得到 $\pi_1$ 作为自变量 $w_1$ 的隐函数：

$$\pi_1 = \max\{\pi^*(w_1, \pi_1/2), w_1\} .$$

为解出这一隐函数，假设 $w_1 \geq \pi^*(w_1, \pi_1/2)$，则有 $\pi_1 = w_1$，但这与 $w_1 \geq \pi^*(w_1, \pi_1/2)$ 相矛盾。从而 $w_1 < \pi^*(w_1, \pi_1/2)$，于是 $\pi_1 = \pi^*(w_1, \pi_1/2)$ 或

$$\pi_1(w_1) = \frac{2w_1}{2 - \delta} \quad \text{且} \quad w_2(w_1) = \frac{w_1}{2 - \delta} .$$

现在我们已经把博弈简化为工会的一个单期最优化问题：给定工会的第一期工资要价 $w_1$，我们已明确了企业第一期的最优反应，工会在进入第二期时的推断，工会第二期最优要价以及企业第二期的最优反应，那么，工会选择的第一期工资要价应该满足

$$\max_{w_1} w_1 \cdot \text{Prob}\{\text{企业接受 } w_1\}$$
$$+ \delta w_2(w_1) \cdot \text{Prob}\{\text{企业拒绝 } w_1, \text{但接受 } w_2\}$$
$$+ \delta \cdot 0 \cdot \text{Prob}\{\text{企业拒绝 } w_1, \text{并拒绝 } w_2\}$$

请注意 Prob{企业接受 $w_1$}并非简单地等于 $\pi$ 超出 $w_1$ 的概率，而应该是 $\pi$ 超出 $\pi_1(w_1)$的概率：

$$\text{Prob}\{\text{企业接受 } w_1\} = \frac{\pi_H - \pi_1(w_1)}{\pi_H}.$$

这一最优化问题的解为 $w_1^*$，已在分析的开始时给出，且 $\pi_1^*$ 和 $w_2^*$ 分别由 $\pi_1(w_1^*)$和 $w_2(w_1^*)$给出。

## 4.3.C 有限重复囚徒困境中的声誉

在第2.3.A节对有限重复完全信息博弈的分析中，我们证明了如果一个阶段博弈有惟一的纳什均衡，则基于此阶段博弈的任何有限重复博弈有惟一的子博弈精炼纳什均衡：不论博弈前面的过程如何，之后的每一阶段都重复阶段博弈的纳什均衡。但与这一理论结果相反，大量的经验证据表明，在有限重复囚徒困境中经常会出现合作结果，特别是在距博弈结束仍比较远的阶段；参见阿克塞尔罗德(Axelrod, 1981)提供的资料。克雷普斯、米尔格龙和威尔逊(1982)证明声誉模型(reputation model)可为此现象提供合理的解释。①

对有限重复囚徒困境中的这种声誉均衡最简单的展开需运用到表示非对称信息的一种新的模型。我们不再假定某方参与者享有关于他自己收益的私人信息，而假定有的参与者享有关于他自己可选择战略集的私人信息。具体地说，我们将假定行(row)参与者只能选择"投桃报李"(Tit-for-Tat)*战略(它可使重复博弈以相互合作开始并在其后模仿对方的行动)的概率为 $p$，而行参与者可以选择完全信息重复博弈中任意可行的战略(包括"投桃报李")的概率为 $1-p$。按通常说法，我们称后一种类型的行参与者为"理性的"。这种方式在表达上的优点在于一旦行参与者偏离了"投桃报李"的战略，则行参与者是理性的就成为共同知识。

---

① 我们在第2.3.B节已证明在无限重复囚徒困境博弈中可以达成合作，一些学者称这种均衡为"声誉"均衡，即使双方参与者的收益和机会都是共同知识。为与此相区分，我们称上面的均衡为基于"威胁和承诺"的均衡，而把"声誉"一词留给本节所讨论的博弈，即至少有一方参与者不了解另一方所掌握的全部知识。

* 这里的英文原意是"针锋相对"，译作"投桃报李"是强调其相互合作的意思。——译注

投桃报李战略既十分简单，又合情合理。同时，它还是阿克塞尔罗德关于囚徒困境的竞赛中的优胜战略。然而，也许有人会认为，假定某参与者只有一种可行战略不够合理，即使它是非常具有吸引力的战略。以表达上不再那么简单为代价，也可以假定双方参与者都可以选择任意战略，但行参与者的收益为私人信息，且投桃报李严格优于另外任何战略的概率为 $p$。（在这一假定下，表达变得复杂了，是因为偏离投桃报李战略不再能使行参与者是理性的成为共同知识。）上面的收益与重复博弈中典型的假定不同：为使模仿列参与者的前阶段战略成为最优选择，行参与人的在一个阶段的收益必须依赖于列参与人前一阶段的行动。作为第三种可能性（同样以表达上的复杂为代价），也可以允许一方参与者的阶段博弈中的收益为私人信息，但同时强调一个阶段的收益只依赖于本阶段的行动，并且重复博弈的总收益等于阶段博弈的收益之和。具体地说，我们可以假定参与人对合作的最优反应是合作的概率为 $p$。克雷普斯、米尔格龙和威尔逊（此后简称为 KMRW）证明这种类型的单方非对称信息并不能成为导致合作均衡的充分条件，而且每一阶段都会出现坦白，与在完全信息下的情况相同。不过，他们还证明，如果存在相同类型的双方非对称信息（即，如果同样列参与者对合作的最优反应是合作的概率为 $p$），则存在一个合作均衡：双方参与者相互合作，直至博弈的最后很少几个阶段为止。

在以下的分析中，我们将假定参与者只能够选择投桃报李战略的概率为 $p$。KMRW 的分析中心在于：即使 $p$ 非常小（即：即使列参与人只稍微有一点怀疑行参与人可能是非理性的），这种不确定性也可以产生很大的效果，可从下面几方面来理解。KMRW 证明存在一个阶段数的上限，在这之内双方的均衡行为都是坦白，这一上限决定于 $p$ 的大小和阶段博弈的收益情况，而与重复博弈中的阶段数无关。那么，在一个足够长的重复博弈任何均衡中，双方参与者相互合作的阶段所占部分就会很大（KMRW 是在序贯均衡的条件下表述其结论的，但他们的论证同样适用于精炼贝叶斯均衡）。KMRW 论证中关键的两步为（i）如果参与者一旦背离了“投桃报李”战略，则行参与人为理性的就成了共同知识，于是此后就不会有参与者再选择合作，于是理性的行参与人就有动机去假扮“投桃报李”类型；（ii）对下面给定的关于阶段博弈收益情况的假定，列参与人对“投桃报李”的最优反应为相互合作，直至博弈的最后一个阶段。

为了给 KMRW 模型中的内在机制提供一个简单说明，我们下面考虑其分析的互补情况：不再假定 $p$ 非常小并分析长时期重复的博弈，而假定 $p$ 足够大，使得在一个短期重复博弈的均衡中，双方参与者除了最后两个阶

段之外都选择相互合作。我们从两阶段的情况开始分析,时间顺序为:

1. 自然为行参与者赋予一种类型。行参与者只能选择"投桃报李"战略的概率为 $p$,可以选择任意战略的概率为 $1-p$。行参与者了解他的类型,但列参与者不知道行参与者的类型。
2. 行、列参与者进行囚徒困境博弈,双方参与者在这一阶段中的选择为共同知识。
3. 行、列参与者第二次,也是最后一次进行囚徒困境博弈。
4. 双方得到各自的收益。理性行、列参与者的收益为各自阶段博弈的收益之和(不考虑贴现)。阶段博弈由图 4.3.4 给出。

| | | 列参与者 合作 | 列参与者 坦白 |
|---|---|---|---|
| 行参与者 | 合作 | 1,1 | $b,a$ |
| | 坦白 | $a,b$ | 0,0 |

图 4.3.4

为使这一阶段博弈成为囚徒困境,我们假定 $a>1$ 且 $b<0$。KMRW 同时还假定 $a+b<2$,这使得(如上面(ii)中所要求的)直至博弈的最后一个阶段之前,对投桃报李的最优反应都是进行合作,而不在合作和坦白之间相互转移。

和在完全信息有限重复囚徒困境中最后一个阶段的情况相同,在这里的两阶段非完全信息博弈的第二阶段,坦白($F$)也严格优于合作($C$),这对理性的行参与者和列参与者是一样的。由于列参与者肯定在最后一个阶段选择坦白,对理性的行参与者来说,也没有任何理由在第一阶段选择合作。最后,投桃报李的战略使博弈始于相互合作,那么,需要确定的惟一行动便是列参与人第一阶段的行动($X$),它将在第二阶段因投桃报李而被模仿,如图 4.3.5 所示。

| | $t=1$ | $t=2$ |
|---|---|---|
| 投桃报李 | $C$ | $X$ |
| 理性行参与人 | $F$ | $F$ |
| 列参与人 | $X$ | $F$ |

图 4.3.5

通过选择 $X=C$,列参与者在第一阶段得到期望收益 $p\cdot 1+(1-p)\cdot b$,且在第二阶段得到 $p\cdot a$。(由于投桃报李的和理性的行参与人在第一阶段选择的行动不同,列参与人在第二阶段开始时就会知道行参与人是投桃报李

类型的还是理性的。第二阶段的期望收益 $p\cdot a$ 则反映了列参与人在决定第一阶段是合作还是坦白时对行参与人类型的不确定性。）通过选择 $X=F$，与之相反，列参与人第一阶段获得 $p\cdot a$，并在第二阶段得到0。因此，下式成立时，列参与人将在第一阶段选择合作

$$p+(1-p)b\geqslant 0\ . \tag{4.3.2}$$

在后面，我们假定(4.3.2)是成立的。

现在，考虑三阶段的情况。给定(4.3.2)，如果列参与人和理性的行参与人都在第一阶段选择合作，则第二和第三阶段的均衡路径将由图4.3.5给出，只需令 $X=C$ 并更改一下阶段的表示数字。我们将推导列参与人和理性的行参与人在第一阶段相互合作的充分条件，在此条件下三阶段的均衡路径如图4.3.6所示。

在这样的均衡中，理性行参与人的收益为 $1+a$，列参与人的期望收益为 $1+p+(1-p)b+pa$。如果理性的行参与人在第一阶段选择坦白，则行参与人是理性的就成为共同知识，于是在第二和第三阶段两参与者都选择坦白。那么，理性行参与人第一阶段选择坦白可得到的总收益为 $a$，它要低于均衡收益 $1+a$，于是理性行参与人没有动机去背离图4.3.6中隐含的战略。

| | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ |
|---|---|---|---|
| 投桃报李 | $C$ | $C$ | $C$ |
| 理性行参与人 | $C$ | $F$ | $F$ |
| 列参与人 | $C$ | $C$ | $F$ |

图4.3.6

下面，我们考虑列参与人是否有动机背离。如果列参与人在第一阶段就选择坦白，则投桃报李将在第二阶段选择坦白，理性的行参与人也将在第二阶段选择坦白，因为列参与人肯定会在最后阶段选择坦白。在第一阶段坦白之后，列参与人必须决定在第二阶段是合作还是继续坦白。如果列参与人在第二阶段也坦白，则投桃报李型在第三阶段将选择坦白，于是博弈的进行将如图4.3.7所示。列参与人从这种背离中得到的收益为 $a$，它小于列参与人均衡的期望收益的条件为

$$1+p+(1-p)b+pa\geqslant a\ .$$

给定(4.3.2)，列参与人不选择这一背离战略的充分条件为

$$1+p\cdot a\geqslant a\ . \tag{4.3.3}$$

| | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ |
|---|---|---|---|
| 投桃报李 | C | F | F |
| 理性行参与人 | C | F | F |
| 列参与人 | F | F | F |

图 4.3.7

另一种情况是,列参与人的背离战略可以是在第一阶段坦白,但在第二阶段合作,这时投桃报李将在第三阶段选择合作,于是博弈的进行如图 4.3.8,列参与人这种背离战略的收益为 $a+b+p\cdot a$,它小于列参与人均衡期望收益的条件为

$$1+p+(1-p)b+pa\geqslant a+b+pa\ .$$

给定(4.3.2),列参与人不选择这一背离战略的充分条件为

$$a+b\leqslant 1\ . \qquad (4.3.4)$$

| | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ |
|---|---|---|---|
| 投桃报李 | C | F | C |
| 理性行参与人 | C | F | F |
| 列参与人 | F | C | F |

图 4.3.8

现在,我们已经证明如果(4.3.2)、(4.3.3)和(4.3.4)成立,则图 4.3.6 描述的博弈进行为三阶段囚徒困境博弈一个精炼贝叶斯均衡下的均衡路径。对一个给定的 $p$ 值,如果收益 $a$ 和 $b$ 的值处于图 4.3.9 中的阴影部分,则满足这三个不等式。随 $p$ 趋于 0,这一阴影部分将会消失,这与前面的结论是一致的,即本节中我们分析短期博弈中的合作均衡,它要求足够大

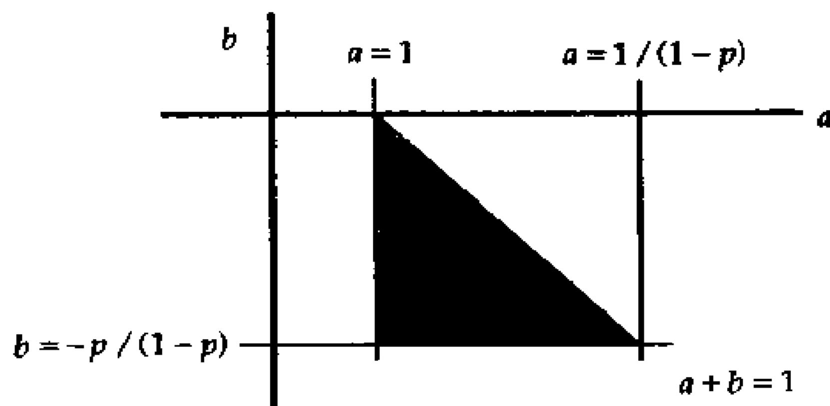



图 4.3.9

的 $p$ 值，而 KMRW 则重点分析长期博弈且 $p$ 值很小的情况。另一方面，如果 $p$ 值大到足以支持短期博弈中的合作，它的值当然可以支持长期博弈中的合作。正式地，如果 $a$、$b$ 和 $p$ 满足(4.3.2)、(4.3.3)及(4.3.4)，则对任意有限的 $T>3$，在 $T$ 阶段重复博弈中存在一个精炼贝叶斯均衡，其中理性的行参与人和列参与人直到 $T-2$ 阶段之前都选择合作，在其后的 $T-1$ 阶段和 $T$ 阶段则如图 4.3.5 所示。参见附录 4.3.C 对这一结论的证明。

### 附录 4.3.C

为使叙述简洁，我们以合作均衡(cooperative equilibrium)表示 $T$ 期重复囚徒困境中如下的精炼贝叶斯均衡，即理性的行参与人和列参与人从博弈开始直至 $T-2$ 期全部选择合作，并在其后的 $T-1$ 期和 $T$ 期遵循图 4.3.5 所示的路径。我们将证明，如果 $a$、$b$ 和 $p$ 满足(4.3.2)、(4.3.3)和(4.3.4)，则对所有的 $T>3$ 都存在一个合作均衡。证明使用数学归纳法：如果对每一个 $\tau=2,3,\cdots,T-1$，在 $\tau$ 期博弈中都存在合作均衡，则在 $T$ 期博弈中存在合作均衡。

首先，我们证明在 $T$ 期博弈中理性的行参与人没有动机背离合作均衡。如果行参与人在 $t<T-1$ 中的任一阶段选择坦白，他是理性的就成为共识，于是行参与人在 $t$ 期得到的收益为 $a$，其后每一期的收益都为 0。但行参与人的均衡收益为从 $t$ 到 $T-2$ 期每一期都等于 1，$T-1$ 期的收益为 $a$，共为 $(T-t-1)+a$，于是对任意的 $t<T-1$，坦白都无利可图。图 4.3.5 中的论证同时表明理性的行参与人在 $T$ 1 期及 $T$ 期也没有动机背离。

其次，我们证明列参与人没有动机背离。关于图 4.3.5 的论证表明，列参与人没有动机背离合作均衡战略，而在 $T-2$ 期之前选择合作，并在 $T-1$ 期选择坦白；关于图 4.3.6 的论证表明，列参与人没有动机选择如下的背离战略：从开始直到 $T-3$ 期一直合作，并在 $T-2$ 期坦白。从而，我们尚需证明列参与人没有动机选择下面的背离战略：从开始直到 $t-1$ 期一直合作，而在 $t$ 期坦白，这里的 $1\leqslant t\leqslant T-3$。

如果列参与人在 $t$ 期坦白，投桃报李就将在 $t+1$ 期坦白，而理性的行参与人也将在 $t+1$ 期选择坦白(因为在 $t+1$ 期的阶段博弈中，坦白严格优于合作，在其后从 $t+2$ 到 $T$ 期至少可以得到 0 的收益，而在 $t+1$ 期合作将使得行参与人是理性的成为共同知识，使 $t+2$ 到 $T$ 期的收益只能等于 0)。由于投桃报李与理性行参与人在 $t$ 期之前全都选择合作，并都在 $t+1$

期坦白，列参与人在 $t+2$ 期开始时的推断仍为行参与人是投桃报李类的概率为 $p$。因此，如果列参与人在 $t+1$ 期合作，则从 $t+2$ 期开始的后一部分的博弈等同于 $\tau = T - (t+2)+1$ 时的 $\tau$ 期博弈。根据归纳法的假定，在这后一部分的 $\tau$ 期博弈中存在一个合作均衡，假定博弈按此均衡进行。则列参与人通过在 $t$ 期坦白，而在 $t+1$ 期合作，从 $t$ 到 $T$ 共可得到收益

$$a + b + [T - (t+2) - 1] + p + (1-p)b + pa \ .$$

它小于列参与人从 $t$ 到 $T$ 期的均衡收益

$$2 + [T - (t+2) - 1] + p + (1-p)b + pa \ . \qquad (4.3.5)$$

至此，我们已证明列参与人没有动机背离均衡，而从开始到 $t-1$ 期合作，在 $t$ 期坦白，并在 $t+1$ 期继续合作，其前提是在从 $t+2$ 期开始的以后部分的博弈按合作均衡进行。更为一般的，列参与人也可以从开始直至 $t-1$ 期合作，从 $t$ 到 $t+s$ 期坦白，并在 $t+s+1$ 期合作。先需考虑三种特殊的情况：(1)如果 $t+s=T$(即列参与人自从 $t$ 期坦白后再不合作)，则列参与人在 $t$ 期收益为 $a$，并在以后收益为 0。等同于(4.3.5)；(2)如果 $t+s+1=T$，则列参与人从 $t$ 期到 $T$ 期的收益为 $a+b$，甚至更低于情况(1)；(3)如果 $t+s+1=T-1$，则列参与人从 $t$ 到 $T$ 期的收益为 $a+b+pa$，小于(4.3.5)。余下的就是要分析 $t+s+1<T-1$ 的情况。和上面 $s=0$ 的情况相同，在从 $t+s+2$ 期开始的以后部分博弈中存在一个合作均衡，假定博弈按此合作均衡进行。则列参与人选择这一背离战略从 $t$ 到 $T$ 期得到的收益为

$$a + b + [T - (t+s+2) - 1] + p + (1-p)b + pa$$

同样小于(4.3.5)。

## 4.4 精炼贝叶斯均衡的再精炼

在第 4.1 节我们定义了精炼贝叶斯均衡为满足要求 1 到 4 的战略和推断，并已知在这样的均衡中，没有参与者的战略包含始于任何信息集的严格劣战略。现在，我们考虑两个更进一步的要求(关于处于均衡路径之外的推断)。第一条的形成出自以下想法：由于精炼贝叶斯均衡排除了参与者 $i$ 选择的战略包含始于任何信息集的严格劣战略的可能性，要令参与者 $j$ 相信参与者 $i$ 将选择这样的战略就是不合理的。

为对这一思想的理解更为精确，考虑图 4.4.1 中的博弈，其中有两个纯

战略精炼贝叶斯均衡：$(L, L', p=1)$和$(R, R', p\leqslant 1/2)$。[①]这一例子关键的特征在于 $M$ 为参与者1的一个严格劣战略：选择 $R$ 可得的收益2超出了参与者1选择 $M$ 可能得到的所有收益——0和1。那么，要令参与者2相信1可能选择了 $M$ 是不合理的；正式地，$1-p$ 不可能为正，于是 $p$ 一定等于1。如果推断 $1-p>0$ 不合理，则$(R, R', p\leqslant 1/2)$也不再是精炼贝叶斯均衡，只有$(L, L', p=1)$成为满足这一要求的惟一的精炼贝叶斯均衡。

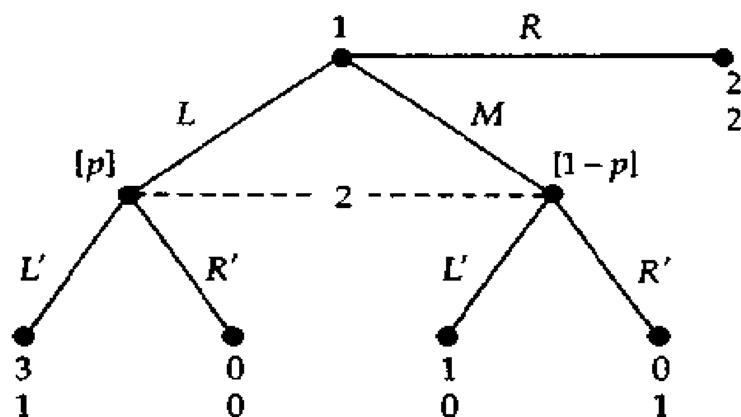



图 4.4.1

这一例子的另外两个特征也值得简要提及。第一，尽管 $M$ 是严格劣战略，$L$ 却不是。如果 $L$ 也是严格劣战略（比如说1的收益3换成3/2时的情况），则同样的论证意味着 $p$ 不可能为正，但这又与前面的结果 $p$ 一定等于1相矛盾。在这样的情况下，这一要求不限制参与者2均衡路径之外的推断；见下文的正式定义。

第二，这一例子并不是对开始时描述的要求的精确说明，因为 $M$ 并非只从一个信息集开始成为严格劣战略，而是其本身就是一个严格劣战略。为理解其中的区别，回顾第1.1.B节对严格劣战略的定义：如果存在另外一个战略 $s_i$，使对其他参与者每一可能的战略组合，$i$ 选择 $s_i$ 的收益都严格大于选择 $s'_i$ 的收益，则 $s'_i$ 为 $i$ 的一个严格劣战略。现在，考虑图4.4.1中博弈的一种扩展情况，其中参与者2在图中1的行动之前有一次行动，并在

① 从标准式表述中可推导出博弈存在两个纯战略纳什均衡：$(L, L')$和$(R, R')$。由于在这里的扩展式中并不存在子博弈，两个纳什均衡都是子博弈精炼的。在$(L, L')$中，参与者2的信息集处于均衡路径，于是，要求3限定了 $p=1$。在$(R, R')$中，这一信息集处于均衡路径之外，但要求4并没有对 $p$ 进行任何限制，因此我们只需要2的推断 $p$ 使行动 $R'$ 成为最优——也就是 $p\leqslant 1/2$。

这最初行动中有两个选择，一个使博弈结束，另一个轮到1在图中1的信息集选择行动。在这一扩展的博弈中，$M$ 仍从1的信息集开始成为一个严格劣战略，但 $M$ 不再是整个博弈的严格劣战略，因为如果2在初始节选择的行动使博弈结束，则 $L$，$M$ 和 $R$ 全都只能得到相同的收益。

由于在图4.4.1中 $M$ 为严格劣战略，令参与者2推断1可能已经选择了 $M$ 当然是不合理的。但严格劣战略这一条件过强，并由此得到的要求又太弱。（因为从一个信息集开始成为严格劣战略的战略要多于整个博弈的严格劣战略，要求 $j$ 不相信 $i$ 会选择前一种战略对 $j$ 推断的限制，要强于要求 $j$ 不相信 $i$ 会选择后一种战略对其推断的限制。）在下面，我们仍使用开始时给出的要求：参与者 $j$ 不相信参与者 $i$ 会选择从任何信息集成为严格劣战略的战略。下面我们给出这一要求的正式表述。

**定义** 考虑轮到参与者 $i$ 行动的一个信息集。战略 $s'_i$ 为始于这一信息集的严格劣战略(strictly dominated beginning at this information set)，如果存在另一个战略 $s_i$ 使得对 $i$ 在给定信息集可能持有的每一推断，并且对每一其他参与者后续战略可能的组合(这里的"后续战略"(subsequent strategy)，是一个包含了在达到给定信息集之后可能会发生的所有情况的完整的行动计划)，$i$ 在给定信息集根据 $s_i$ 选择行动并在其后根据选择后续战略得到的收益严格大于根据 $s'_i$ 选择行动和后续战略得到的收益。

**要求5：** 在可能的情况下，在每一参与者均衡路径之外的推断中，如果一个节点只有在另一参与者选择始于某些信息集的严格劣战略时，才能够到达，则应认定到达这一节点的概率为0。

要求5中的限定语"在可能的情况下"，是考虑到类似图4.4.1中参与者1的收益3换成3/2的情况，这时 $M$ 和 $L$ 都劣于 $R$。在这种情况下，要求1要求参与者2持有一个推断，但又不可能在推断中令到达 $M$ 和 $L$ 之下的节点的概率都为0，于是要求5不再适用。

作为对要求5的第二个说明，考虑图4.4.2的信号博弈。与第4.2.A节相同，发送者战略$(m', m'')$表示类型 $t_1$ 选择信号 $m'$，且类型 $t_2$ 选择信号 $m''$；接收者战略$(a', a'')$表示接收者在 $L$ 之后选择行动 $a'$，在 $R$ 之后选择行动 $a''$。我们可以很容易地检验对 $q \geq 1/2$，战略和推断$[(L,L),(u,d), p=0.5, q]$构成博弈的一个混同精炼贝叶斯均衡。不过，这一信号博弈的关键特征，是令 $t_1$ 选择 $R$ 没有任何意义。正式地，发送者战略$(R,L)$和$(R,R)$——亦即 $t_1$ 选择 $R$ 的所有战略——为始于发送者对应于类型 $t_1$

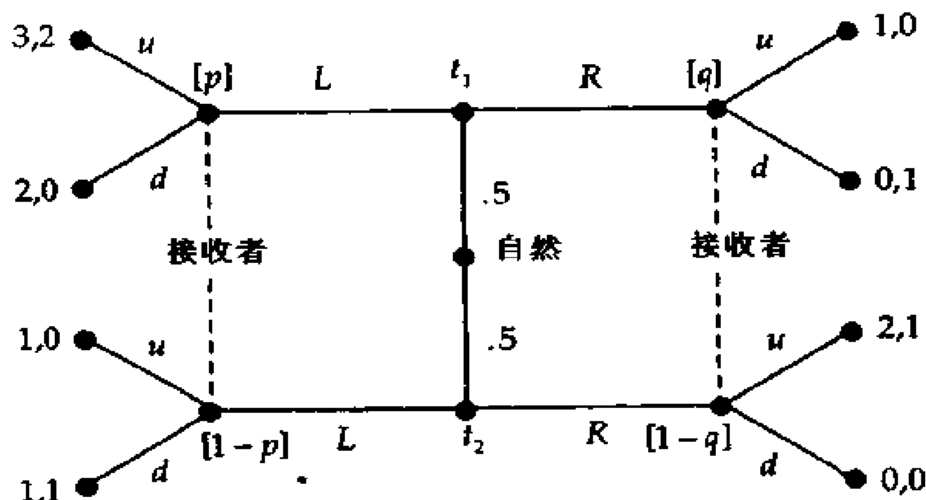



图 4.4.2

的信息集的严格劣战略。① 那么，只有在发送者选择了始于一个信息集的严格劣战略时，才可能到达 $R$ 之后接收者的信息集中节点 $t_2$。而且，存在另外一个始于任何信息集的非劣战略——即$(L, R)$，可以在 $R$ 之后接收者的信息集中到达节点 $t_2$。从而要求 5 限定 $q=0$。因为只有在 $q\geqslant 1/2$ 时，$[(L, L), (u, d), p=0.5, q]$为博弈的精炼贝叶斯均衡，此均衡不能满足要求 5。

可以针对第 4.2.A 节定义的信号博弈精炼贝叶斯均衡，将要求 5 重新表述如下。

**定义** 在信号博弈中，$M$ 中的信号 $m_j$ 称为 $T$ 中类型 $t_i$ 的劣信号(dominated for type $t_i$)，如果存在另外一个信号 $m_{j'}$，使得 $t_i$ 选择 $m_{j'}$ 的最低可能收益大于 $t_i$ 选择 $m_j$ 的最高可能收益：

$$\min_{a_k \in A} U_s(t_i, m_{j'}, a_k) > \max_{a_k \in A} U_s(t_i, m_j, a_k) .$$

**信号要求 5** 如果 $m_j$ 之后的信息集处于均衡路径之外，且 $m_j$ 为类型 $t_i$ 的劣信号，则(在可能的情况下)接收者的推断 $\mu(t_i \mid m_j)$中，认为发送者的类型为 $t_i$ 的概率应该等于 0(只要 $m_j$ 不对 $T$ 中所有的类型都是劣信号，

① 由于发送者对应于类型 $t_1$ 的信息集为一个单节信息集，在定义始于这一信息集的严格劣战略时，发送者的推断不起任何作用。则证明$(R, L)$和$(R, R)$是始于这一信息集的严格劣战略，只需证明对接收者的每一战略，类型 $t_1$ 的发送者选择另一战略都可以获得更高的收益。$(L, R)$就是这么一个战略：它使得 $t_1$ 的最低收益为 2，而$(R, L)$和$(R, R)$给 $t_1$ 的最高收益为 1。

即为适用这一要求的可能情况)。

在图 4.4.2 的博弈中,分离精炼贝叶斯均衡$[(L,R),(u,u),p=1,q=0]$则自然满足信号要求 5(因为不存在这一均衡路径之外的信息集)。作为一个需经检验才可确定满足信号要求 5 的例子,假设当类型 $t_2$ 选择 $R$ 时,接收者的收益为:选择 $d$ 的收益为 1,选择 $u$ 的收益为 0,而不再是图中的 0 和 1。这时,$[(L,L),(u,d),p=0.5,q]$对任意的 $q$ 值都是一个混同精炼贝叶斯均衡,于是$[(L,L),(u,d),p=0.5,q=0]$就是一个满足信号要求 5 的混同精炼贝叶斯均衡。

在有些博弈中,存在看起来不合情理然而却满足要求 5 的精炼贝叶斯均衡。博弈论的最新研究中,最为活跃的领域之一便涉及到如下两个相关问题:(i)在什么情况下,一个精炼贝叶斯均衡是不合理的;(ii)在对均衡的定义中还能够再加上哪些要求,以剔除这些不合理的精炼贝叶斯均衡。赵和克雷普斯(1987)在这一领域的研究中作出了早期开创性的并有广泛影响的贡献。在本节的最后,我们讨论他们论文中三个方面的问题:(1)“啤酒或热狗”(Beer & Quiche)信号博弈,它说明了明显不合理的精炼贝叶斯均衡也可以满足信号要求 5;(2)对信号要求 5 的一个强化要求(但绝非可能的最强条件的要求),称为直观标准(3)直观标准在斯彭斯的就业市场信号博弈中的应用。

在“啤酒或热狗”信号博弈中,发送者有两种可能的类型:$t_1$= 软弱型(wimpy)(以 0.1 的概率),$t_2$= 粗暴型(surly)(以 0.9 的概率)。发送者的信号是早餐选择啤酒还是热狗;接收者的行动是决定是否与发送者挑起冲突。各方收益情况表现出如下特征:软弱类型偏好选择热狗作早餐,粗暴类型偏好啤酒,两种类型都不愿意同接收者相冲突(并与早餐吃什么相比,更关心这一点);接收者则偏好与软弱类型挑起冲突,但不希望与粗暴类型挑起冲突(可以看出,如果将这一博弈中类型、信号和行动的名称稍作更换,就可以成为进入壁垒模型,与在米尔格龙和罗伯茨(1982)中的分析相似)。在图 4.4.3 的扩展式表述中,享用自己所偏好的早餐给两种类型带来的收益都是 1,而避免冲突给两种类型带来的额外收益为 2。接收者通过与软弱类型(粗暴类型)冲突获得的收益分别为 1(-1);所有其他情况的收益为 0。

在这一博弈中,$[(热狗,热狗),(不冲突,冲突),p=0.1,q]$对任意 $q\geq 1/2$ 构成一个混同精炼贝叶斯均衡。而且这一均衡满足信号要求 5,因为啤酒对两种类型的发送者都不是劣信号。具体地说,软弱类型并不能保证选择热狗(最低的收益为 1)一定比选择啤酒(最高收益为 2)要好。但另一方面,接收者均衡路径之外的推断的确令人可疑:如果接收者意料之外地观测

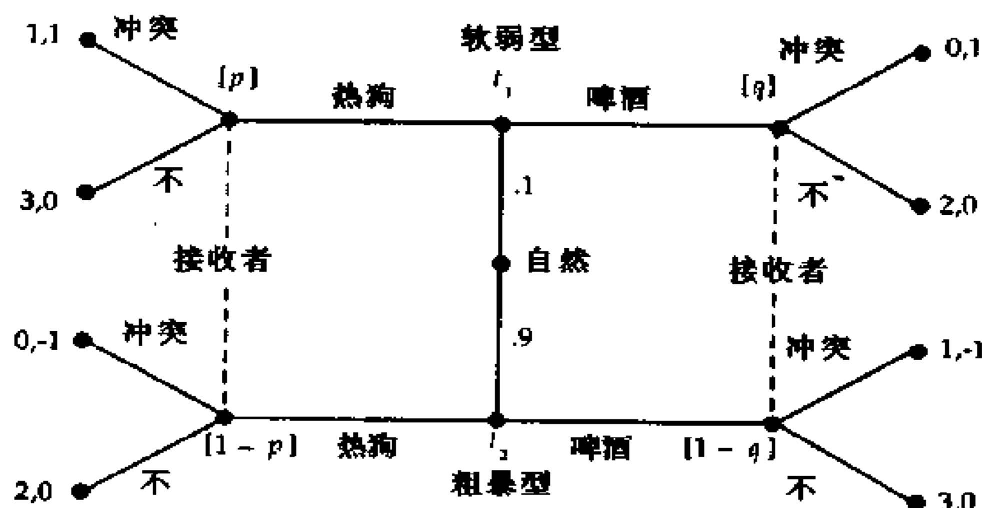



图 4.4.3

到啤酒，则他推测发送者与粗暴型至少有同样的可能性是软弱型（即 $q \geqslant 1/2$），即使(a)软弱型选择啤酒并不能提高他选择热狗时的均衡收益；(b)粗暴型可能将其收益从均衡条件的 2 提高到 3，只要接收者持有的推断 $q < 1/2$。给定(a)和(b)，可以期望粗暴类型在选择啤酒之后作出如下表白：

> 看到我选择了啤酒，你应该相信我属于粗暴类型：选择啤酒无法提高软弱类型的收益，理由如(a)；并且如果选择啤酒将使你确信我是粗暴类型的，则这样做将提高我的收益，理由如(b)。

如果这样的表白被相信了，就可得到 $q = 0$，它与上面的混同精炼贝叶斯均衡是互不相容的。

我们可以把这一论证推广到第 4.2.A 节定义的信号博弈类型，由此得到信号要求 6。

**定义**　给定信号博弈中的一个精炼贝叶斯均衡，$M$ 中的信号 $m_j$ 称为 $T$ 中类型 $t_i$ 的均衡劣信号（equilibrium-dominated for type $t_i$），如果 $t_i$ 的均衡收益，用 $U^*(t_i)$表示，大于 $t_i$ 选择 $m_j$ 时最大的可能收益：

$$U^*(t_i) > \max_{a_k \in A} U_S(t_i, m_j, a_k)$$

**信号要求 6**　（"直观标准"，赵和克雷普斯，1987）：如果 $m_j$ 之后的信息集处于均衡路径之外，且 $m_j$ 为类型 $t_i$ 的均衡劣信号，则（在可能的情况下）接收者的推断 $\mu(t_i | m_j)$中分配给类型 $t_i$ 的概率应该等于 0（如果 $m_j$ 不对 $T$ 中所有的类型都是均衡劣信号，即属要求中的"可能情况"）。

“啤酒或热狗”证明了一个信号 $m_j$ 可以是 $t_i$ 的均衡劣信号，即使它非 $t_i$ 的劣信号。不过，如果 $m_j$ 为 $t_i$ 的劣信号，则 $m_j$ 一定为 $t_i$ 的均衡劣信号，于是信号要求 6 的限定使得信号要求 5 成为多余。赵和克雷普斯运用科尔伯格和默滕斯(Kohlberg & Mertens, 1986)发展出的更强的结论，证明所有第 4.2.A 节定义的信号博弈类型都存在满足信号要求 6 的精炼贝叶斯均衡。这里的论证运用的逻辑方法有时称为“前向归纳法”(forward induction)。因为在解释背离行为时——即在形成推断 $\mu(t_i|m_j)$ 时——接收者要考虑发送者过去的行为是不是理性的，而逆向归纳法则假定将来的行为应该是理性的。

为说明信号要求 6，我们用它来分析第 4.2.B 节中就业市场信号模型存在嫉妒的情况。前面已讲到，在这一模型中存在大量的混同，分离以及杂合精炼贝叶斯均衡。但出人意料的是，这些均衡中只有一个分离均衡可以通过信号要求 6 的检验——在此分离均衡中，低能力的工人选择自己完全信息集条件下的教育水平，高能力工人选择的教育水平较高，并恰好使低能力工人模仿高能力工人不会带来更高的收益，如图 4.4.4 所示。

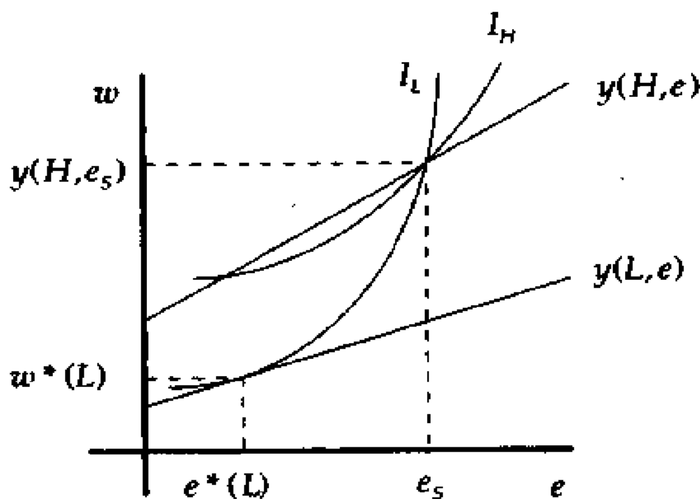



图 4.4.4

在任意的精炼贝叶斯均衡中，如果工人选择教育水平 $e$，且企业据此推断工人是高能力的概率为 $\mu(H|e)$，则工人的工资将等于

$$w(e)=\mu(H|e)\cdot y(H,e)+[1-\mu(H|e)\cdot y(L,e)]\ .$$

那么，低能力工人选择 $e^*(L)$ 的效用至少等于 $y[L,e^*(L)]-c[L,e^*(L)]$，它大于工人选择任何 $e>e_s$ 时的效用，不论企业在观测到 $e$ 之后所持有的推断如何。用信号要求 5 的话来说，就是对低能力类型的工人，任何大于 $e_s$ 的教育水平 $e$ 都是劣信号。简要地说，信号要求 5 限定对 $e>e_s$ 的

推断 $\mu(H|e)=1$，它又意味着高能力工人选择 $\hat{e}>e_s$ 的分离均衡不能满足要求 5，因为在这样一个均衡中企业必须对 $e_s$ 和 $\hat{e}$ 之间的教育水平推断 $\mu(H|e)<1$。(精确的表述为：信号要求 5 限定了对 $e>e_s$，由于 $e$ 不是高能力类型的劣信号，应该有 $\mu(H|e)=1$；但如果存在一个分离均衡，其中高能力工人选择的教育水平 $\hat{e}>e$，则 $e_s$ 到 $\hat{e}$ 之间的信号不是高能力类型的劣信号，于是论证通过。)因此，惟一满足信号要求 5 的分离均衡就是图 4.4.4 中所示的均衡。

从上面的论证中还可以得到另一个结论：在满足信号要求 5 的任何均衡中，高能力工人的效用一定至少等于 $y(H,e_s)-c(H,e_s)$，下面我们证明这一点意味着一些混同及杂合均衡不能满足信号要求 5。根据工人是高能力的概率($q$)是否足够低，使得工资函数 $w=q\cdot y(H,e)+(1-q)\cdot y(L,e)$ 处于高能力工人通过点 $[e_s,y(H,e_s)]$ 的无差异曲线的下方，可以分为两种情况。

首先，我们假设 $q$ 值很低，如图 4.4.5 所示。在这种情况中，没有混同均衡可以满足信号要求 5，因为在这样的均衡中高能力工人的效用水平无法达到 $y(H,e_s)-c(H,e_s)$。类似地，高能力工人随机选择信号的杂合均衡也不能满足信号要求 5，因为在这样的均衡中，混同发生的(教育，工资)点处于工资函数 $w=q\cdot y(H,e)+(1-q)\cdot y(L,e)$ 的下方。最后，低能力工人随机选择信号的杂合均衡也不能满足信号要求 5，因为在这样的均衡中，混同发生的(教育，工资)点一定处于低能力工人通过点 $[e^*(L),w^*(L)]$ 的无差异曲线之上，如图 4.2.9 所示，从而就位于高能力工人通过点 $[e_s,y(H,e_s)]$ 的无差异曲线之下。综上，在图 4.4.5 所示的情况下，惟

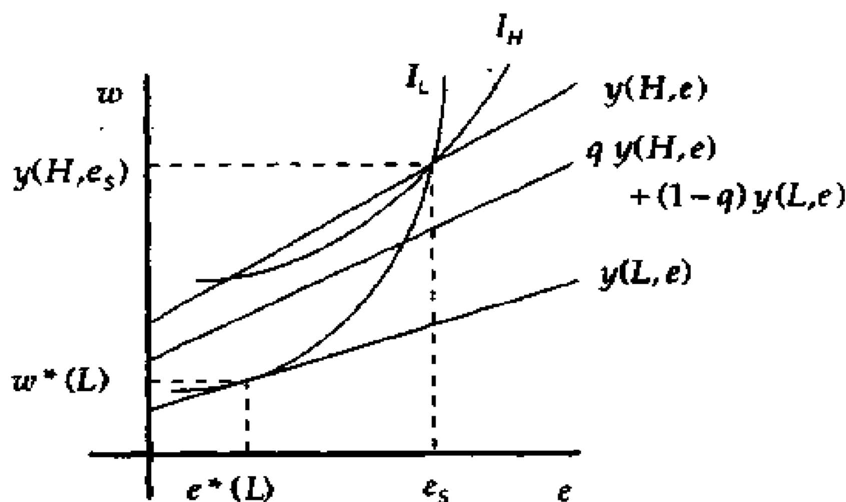



图 4.4.5

一满足信号要求 5 的精炼贝叶斯均衡就是图 4.4.4 所表示的分离均衡。

现在我们假设 $q$ 值较高，如图 4.4.6 所示。与上面的情况相似，低能力工人随机选择信号的杂合均衡不能满足信号要求 5，但这时混同均衡和高能力工人随机选择信号的杂合均衡却可能满足信号要求 5，只要混同发生的(教育，工资)点位于图中阴影区域之内。然而，这样的均衡却无法满足信号要求 6。

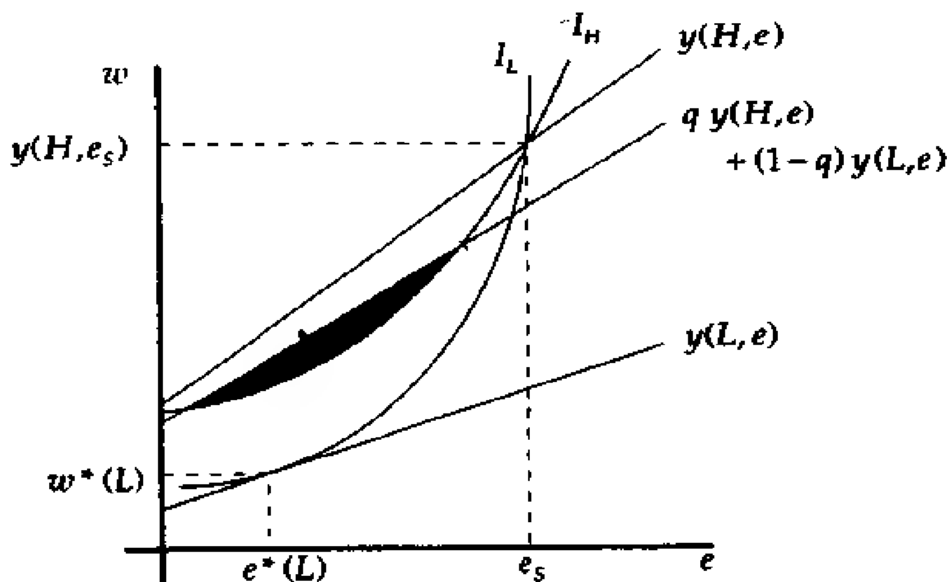



图 4.4.6

考虑图 4.4.7 所示的混同于 $e_p$ 的均衡，教育水平选择 $e>e'$ 对低能力类型来讲是均衡劣信号，因为即使支付在教育水平 $e$ 之下的最高的工资——具体地说，为 $y(H,e)$，得到的(教育，工资)点也处于低能力工人通过均衡点$(e_p, w_p)$的无差异曲线的下方。不过，位于 $e'$ 到 $e''$ 之间的教育选择，却不是高能力类型的均衡劣信号：如果这样一个选择可使企业确信自己是属于高能力类型的，则企业所给的工资为 $y(H,e)$，它可使高能力工人的福利比前面混同均衡下有所提高。那么，如果 $e'<e<e''$，则信号要求 6 就限定了企业的推断必须为 $\mu(H|e)=1$，它又意味着我们讨论的混同均衡不能满足信号要求 6，因为在这样一个均衡中，企业对处于 $e'$ 和 $e''$ 之间的教育水平的推断必须为 $\mu(H|e)<1$。这一论证同样适用于图中阴影区域之内的所有混同及杂合均衡。于是，满足信号要求 6 的惟一精炼贝叶斯均衡就是图 4.4.4 所示的分离均衡。

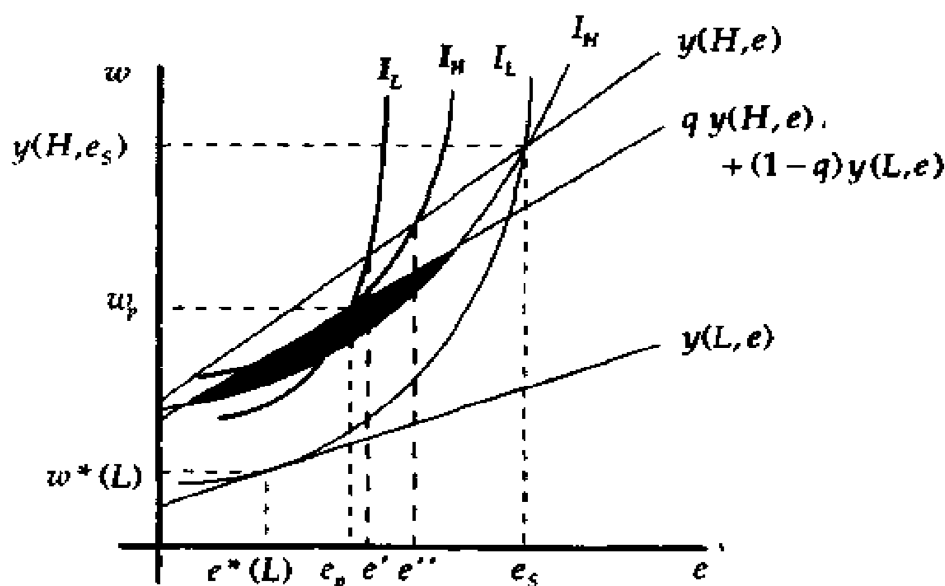


图4.4.7

## 4.5 进一步阅读

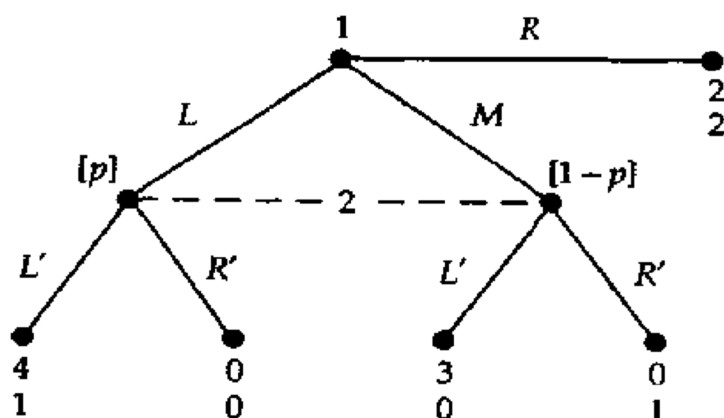
米尔格龙和罗伯茨(1982)提供了信号博弈在产业组织理论领域的经典应用。在公司财务理论方面，巴塔查里亚(1979)及利兰(Leland)和派尔(Pyle)(1977)运用信号模型分别分析了股利政策以及股份所有权管理。在货币政策方面，罗戈夫(1989)总结了重复博弈、信号以及声誉模型，鲍尔(1990)运用联储类型随时间发生的(不可观测的)变化解释通货膨胀的时间路径。关于空谈博弈的应用，参见书中已介绍过的奥斯汀和史密斯(1990)，法雷尔和吉本斯(1991)，马修斯(1989)以及斯坦(1989)的论文。凯南(Kennan)和威尔逊(1992)对非对称信息谈判的理论及经验模型进行了一个综述，并强调罢工及诉讼所发挥的作用。克兰顿(Cramton)和特拉西(Tracy)(1992)允许工会选择是罢工还是忍耐(即在前期的工资下继续工作)；他们证明理论上经常会发生忍耐，并且这一模型可对许多经验中的罢工提供解释。关于声誉，参见索贝尔(1985)的论文"信心理论"，其中知情的一方在一系列的空谈博弈中，既可能是不知情决策者的"朋友"，也可能是其"敌人"。最后，参见丘(Cho)和索贝尔(1990)关于在信号博弈中进行再精炼的进一步内容，包括在斯彭斯模型存在多于两种类型时，通过再精炼挑选有效率的分离均衡。

## 4.6 习题

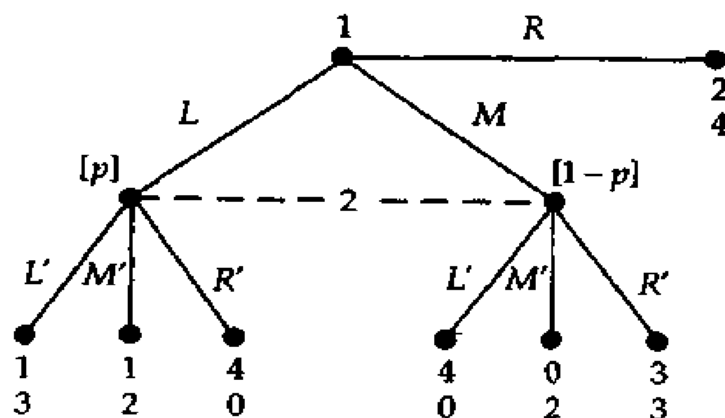
**第 4.1 节**

4.1 对下面的扩展式博弈，推导其标准式博弈，并且找出所有的纯战略纳什均衡、子博弈精炼纳什均衡以及精炼贝叶斯均衡。

4.2 证明在下面的扩展式博弈中，不存在纯战略精炼贝叶斯均衡。并求出其混合战略精炼贝叶斯均衡?




（习题4.1a）

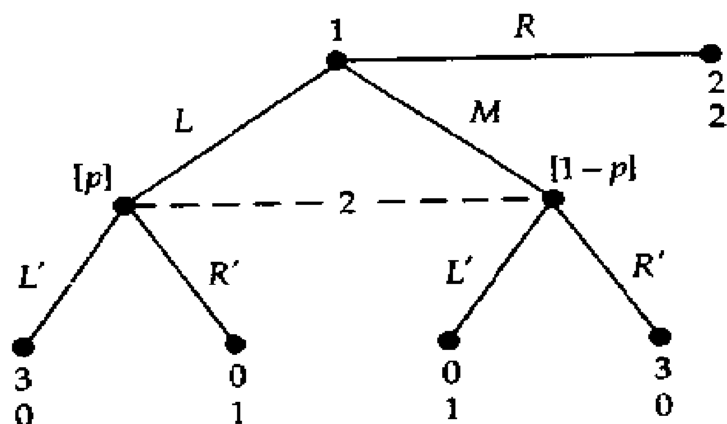



（习题4.1b）

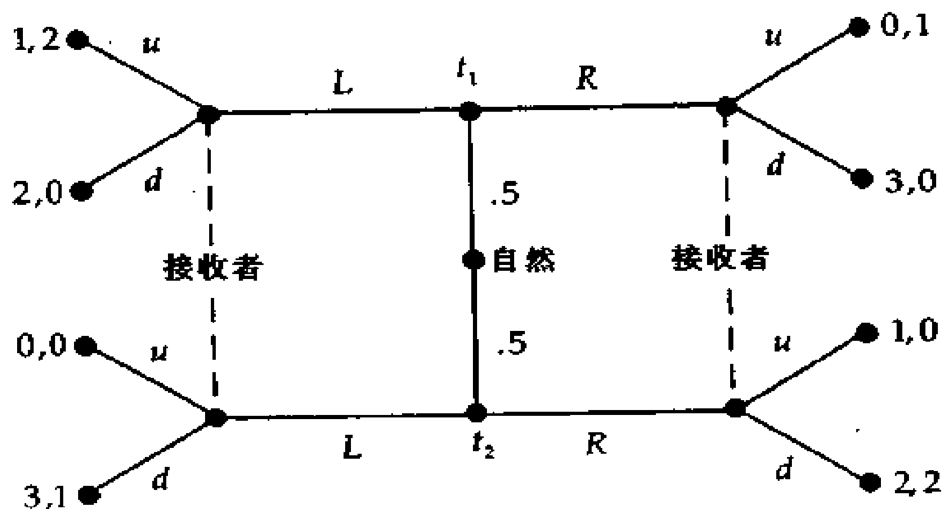
**第 4.2 节**

4.3 a. 写出下面的信号博弈的一个混同精炼贝叶斯均衡，其中两种

类型的发送者都选择信号 $R$。




(习题 4.2)



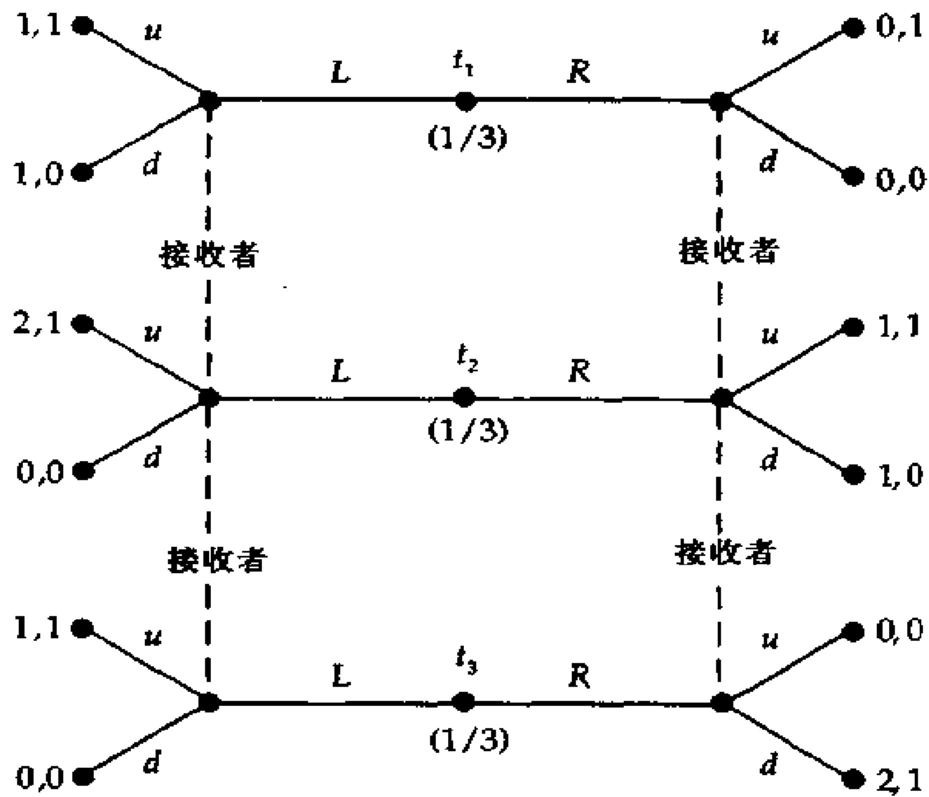

(习题4.3a)

b. 下面的三类型信号博弈由自然的行动开始,没有在树上表示出来,以同样的概率赋予发送者三种类型中的一种。写出一个混同精炼贝叶斯均衡,其中三种类型的发送者都选择信号 $L$。

4.4 写出以下信号博弈中所有的纯战略混同及分离精炼贝叶斯均衡。

4.5 求出习题 4.3(a)和(b)中的所有纯战略精炼贝叶斯均衡。

4.6 下面的信号博弈属于与图 4.1.1 相同类型的完全非完美信息动态博弈。(类型 $t_1$ 和 $t_2$ 可以看成图 4.1.1 中参与者 1 的行动 $L$ 和 $M$;如果信号博弈中的发送者选择了 $R$,则事实上博弈已经结束,与图 4.1.1 中参与者 1 选择 $R$ 的情况类似。)求出此信号博弈的(i)纯战略贝叶斯纳什均衡;




（习题4.3b）

(ii)纯战略精炼贝叶斯均衡。并分别将(i)和(ii)与图4.1.1中的纳什均衡及精炼贝叶斯均衡相比较。

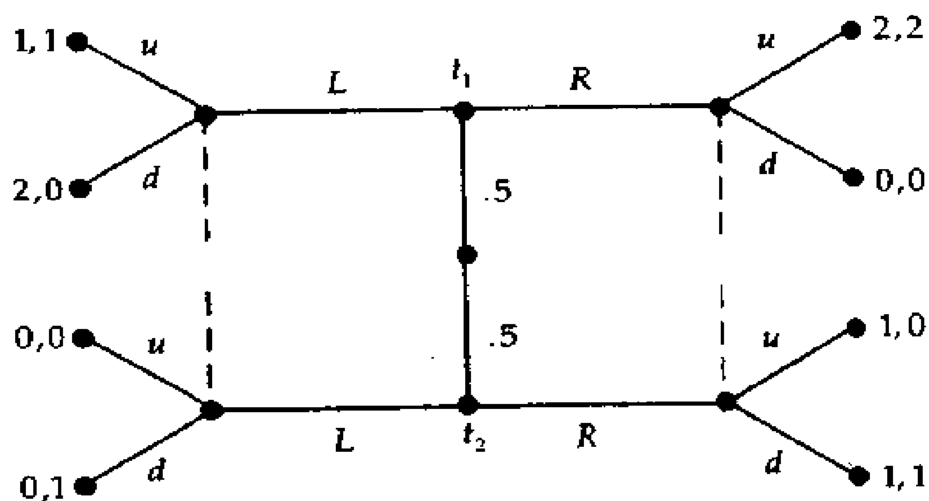
4.7 画出两类型就业市场信号模型中的无差异曲线和生产函数，并写出它的一个准分离精炼贝叶斯均衡，其中高能力工人随机选择信号。

### 第4.3节

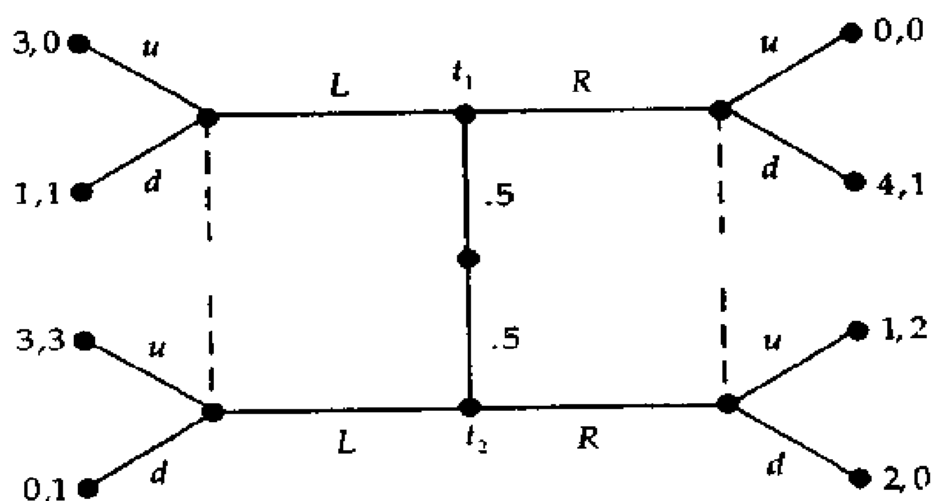
4.8 解出下面空谈博弈的纯战略精炼贝叶斯均衡。自然赋予每一种类型的概率相等。和图4.3.1相同，每一单元格的第一个值表示发送者收益，第二个值表示接收者收益，但该图却不表示一个标准式博弈，而只是给出每一类型行动组合下参与者的收益情况。

| | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0,1 | 0,0 | 0,0 |
| $a_2$ | 1,0 | 1,2 | 1,0 |
| $a_3$ | 0,0 | 0,0 | 2,1 |

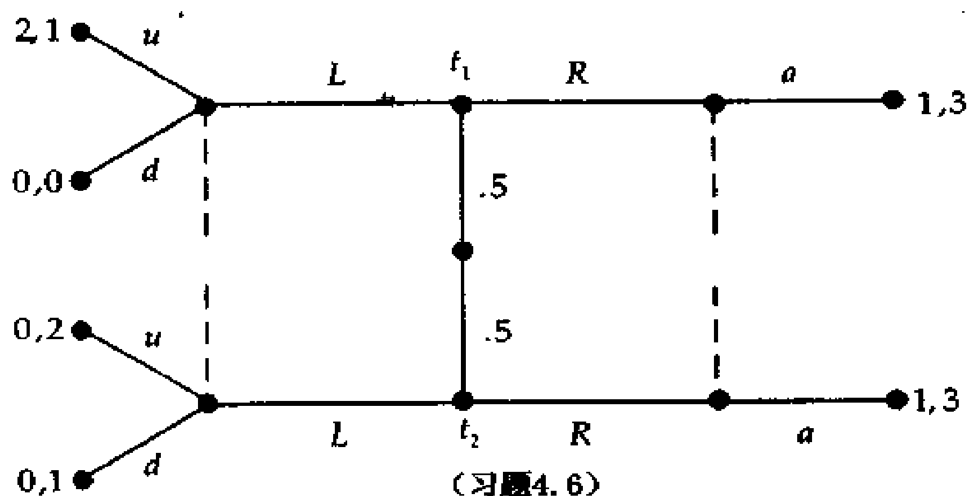
4.9 考虑第4.3.A节讨论的克劳福德和索贝尔空谈模型的例子：发送者的类型均匀分布于从0到1的区间（正式地，$T=[0,1]$且对$T$中的所




（习题4.4a）




（习题4.4b）




（习题4.6）

有 $t$，$p(t)=1$)；行动空间是从 0 到 1 的区间($A=[0,1]$)，接收者的收益函数为 $U_R(t,a)=-(a-t)^2$；发送者的收益函数为 $U_S(t,a)=-[a-(t+b)]^2$。对什么样的 $b$ 值，存在三段均衡？在三段均衡和二段均衡中，接收者的期望收益哪个更高？哪些类型的发送者在三段均衡中能够得到更高的收益？

4.10　两个合伙人必须就其合伙企业进行清算。合伙人 1 现在拥有的权益份额为 $s$，合伙人 2 拥有 $1-s$。两合伙人同意进行如下博弈：合伙人 1 提出一个价格 $p$，然后合伙人 2 可以选择以 $ps$ 的价格购买合伙人 1 的股份，或以 $p(1-s)$ 的价格将自己的股份卖给合伙人 1。假设两个合伙人对拥有全部企业价值的估价相互独立，且服从[0,1]区间的均匀分布，以上是共同知识。但每一合伙人的估价是私人信息。求出博弈的精炼贝叶斯均衡。

4.11　买方和卖方对商品的估价分别为 $v_b$ 和 $v_s$。交易能够带来净收益(即 $v_b>v_s$)是共同知识，但收益的大小却是私人信息，具体情况如下：卖方的估价服从[0,1]区间的均匀分布；买方的估价 $v_b=k\cdot v_s$，这里 $k>1$ 是共同知识；卖方了解 $v_s$(从而知道 $v_b$)，但买方却不清楚 $v_b$(或 $v_s$)。假设买方给出一个单一买价 $p$，卖方既可以接受，又可以拒绝。当 $k<2$ 时，博弈精炼贝叶斯均衡是什么？$k>2$ 时呢？(参见萨缪尔森(1984))

4.12　本题考虑第 4.3.B 节分析的两阶段谈判博弈无限期进行下去的情况。和前面的假定相同，企业对自己的利润($\pi$)拥有私人信息，$\pi$ 服从 $[0,\pi_0]$ 区间的均匀分布，所有阶段都由工会提出工资要价，且有一个保留工资水平 $w_r=0$。

在两阶段博弈中，如果 $\pi>\pi_1$，企业接受工会的第一次要价($w_1$)，这里的利润类型 $\pi_1$ 使下面两种情况无差异(i)接受 $w_1$；(ii)拒绝 $w_1$，并接受工会第二期的要价 $w_2$，这里 $w_2$ 是企业利润服从 $[0,\pi_1]$ 上的均匀分布且谈判到了最后一期时工会的最优要价。在无限期的情况下，与此不同的是，$w_2$ 是企业利润服从 $[0,\pi_1]$ 上的均匀分布，且在谈判还要(潜在地)继续无限期地进行下去的条件下，工会的最优要价。尽管 $\pi_1$ 仍是使选择(i)和(ii)无差异的利润类型，$w_2$ 的变化将导致 $\pi_1$ 也发生变化。

始于无限期博弈第二期的后续博弈在性质上相当于整个博弈：依然存在潜在的无限期谈判，并且企业的利润仍服从 0 到 一个上限间的均匀分布；惟一的区别就是这里的上限不再是 $\pi_0$，而变为 $\pi_1$。索贝尔和高桥(1983)证明，无限期博弈存在一个静态的精炼贝叶斯均衡。在这一均衡中，如果企业的利润服从 0 到 $\pi^*$ 之间的均匀分布，则工会开出的工资要价为

$w(\pi^*)=b\pi^*$，于是第一期的要价为 $b\pi_0$，第二期为 $b\pi_1$，如此等等。如果工会选择上面的静态战略，企业的最优反应可以求得为 $\pi_1=c\pi_0, \pi_2=c\pi_1$，如此等等，并且当企业利润服从 0 到 $\pi^*$ 区间的均匀分布时，工会期望收益的现值为 $V(\pi^*)=d\pi^*$。证明 $b=2d, c=1/[1+\sqrt{1-\delta}]$ 且 $d=[\sqrt{1-\delta}-(1-\delta)]/2\delta$。

4.13　企业和工会进行下面的两阶段谈判博弈。企业利润 $\pi$ 服从 0 到 1 之间的均匀分布，工会的保留工资为 $w_r$，以上都是共同知识，只有企业才了解 $\pi$ 的真实值。假定 $0<w_r<1/2$，求出下面博弈的精炼贝叶斯均衡：

1. 在第一阶段的开始，工会向企业提出一个工资要价 $w_1$；
2. 企业或接受或拒绝 $w_1$，如果企业接受 $w_1$，则两阶段都可以开工生产，于是工会的收益为 $2w_1$，企业收益为 $2(\pi-w_1)$（不考虑贴现因素）。如果企业拒绝 $w_1$，则第一期就没有产出，且企业和工会第一阶段的收益都等于 0；
3. 在第二阶段的开始（假定企业拒绝了 $w_1$），企业向工会提出一个工资出价 $w_2$（不同于索贝尔和高桥的模型，这一出价不再由工会提出）；
4. 工会或接受或拒绝这一出价，如果工会接受 $w_2$，则第二期会有产出，于是第二期（也是全部）的收益为工会 $w_2$，企业 $\pi-w_2$（前面已讲过第一期的收益为 0）。如果工会拒绝 $w_2$，则没有产出，工会在第二期赚得其保留工资 $w_r$，企业关闭，收益为 0。

4.14　纳莱巴夫（Nalebuff, 1987）分析了下面的原告和被告之间在开庭审判前谈判的模型。如果案件交到法庭，被告被迫支付给原告损害赔偿 $d$，$d$ 服从从[0, 1]区间的均匀分布，只有被告才知道 $d$ 的真正值，以上是共同知识。交到法庭则使原告花费 $c<1/2$，但（为简单起见）不增加被告的成本。

博弈时间顺序如下：(1)原告提出一个解决方案要约 $s$；(2)被告选择接受和解（这时原告的收益为 $s$，被告的收益为 $-s$）或者拒绝；(3)如果被告拒绝 $s$，则原告决定到法庭起诉，这时原告的收益为 $d-c$，被告的收益为 $-d$，或是放弃起诉，这种情况下双方参与者的收益都为 0。

在第(3)阶段，如果原告相信存在一些 $d^*$ 的值，当且仅当 $d>d^*$ 时被告将选择和解，原告关于是否起诉的最优决策是什么？在第(2)阶段，对给定的要约 $s$，如果被告推断拒绝后原告将向法庭起诉的概率为 $p$，被告的类型为 $d$ 时，其最优的和解决策是什么？如果要约 $s>2c$，开始于阶段(2)的连续博弈的精炼贝叶斯均衡是什么？如果要约 $s<2c$ 呢？如果 $c<1/3$，求

出整个博弈的精炼贝叶斯均衡。如果 $1/3<c<1/2$ 呢?

4.15 考虑一个立法过程,其中可行的政策从 $p=0$ 到 $p=1$ 之间连续波动。国会理想中的政策为 $c$,但政策现状为 $s$,这里 $0<c<s<1$,也就是说,国会理想中的政策位于现行政策的左侧。总统认为的理想政策为 $t$,服从[0,1]区间上的均匀分布,但属总统本人的私人信息。时间顺序非常简单:国会提议一个政策 $p$,总统可以选择签署还是否决。如果 $p$ 被签署通过,则国会的收益为 $-(c-p)^2$,总统的收益为 $-(t-p)^2$;如果 $p$ 遭否决,则收益分别为 $-(c-s)^2$ 和 $-(t-s)^2$。什么是精炼贝叶斯均衡?证明在均衡中 $c<p<s$。

现在,假设在国会提出政策议案之前,总统可以发表一篇演说(即可发送一个空谈信号)。考虑一个两阶段精炼贝叶斯均衡,其中国会根据总统发送哪一种信号,而选择议案 $p_L$ 或 $p_H$。证明在这样的均衡中不可能有 $c<p_L<p_H<s$。并解释为什么由此可以推出均衡中,国会的议案不可能有三个或更多?推导在 $c=p_L<p_H<s$ 条件下的两段均衡的详细结果:哪种类型选择哪种信号,且 $p_H$ 的值是什么?(参见马修斯,1989)

**第4.4节**

4.16 考虑习题 4.3(a)和(b)描述的混同均衡。对每一个均衡:检验支持该均衡的推断是否满足信号要求5;检验支持均衡的推断是否满足信号要求6(直观标准)。

## 4.7 参考文献


Austen-Smith, D. 1990. "Information Transmission in Debate." *American Journal of Political Science* 34:124—52.

Axelrod, R. 1981. "The Emergence of Cooperation Among Egoists." *American Political Science Review* 75:306—18.

Ball, L. 1990. "Time-Consistent Policy and Persistent Changes in Inflation." National Bureau of Economic Research Working Paper #3529 (December).

Barro, R. 1986. "Reputation in a Model of Monetary Policy with Incomplete Information." *Journal of Monetary Economics* 17:3—20.

Bhattacharya, S. 1979. "Imperfect Information, Dividend Policy, and the 'Bird in the Hand' Fallacy." *Bell Journal of Economics* 10:259—70.

Cho, I.-K., and D. Kreps. 1987. "Signaling Games and Stable Equilibria." *Quarterly Journal of Economics* 102:179—222.

Cho, I. – K., and J. Sobel. 1990. "Strategic Stability and Uniqueness in Signaling Games." *Journal of Economic Theory* 50:381—413.

Cramton, P., and J. Tracy. 1992. "Strikes and Holdouts in Wage Bargaining: Theory and Data." *American Economic Review* 82:100—21.

Crawford, V., and J. Sobel. 1982. "Strategic Information Transmission." *Econometrica* 50:1431—51.

Dybvig, P., and J. Zender. 1991. "Capital Structure and Dividend Irrelevance with Asymmetric Information." *Review of Financial Studies* 4:201—19.

Farrell, J., and R. Gibbons. 1991. "Union Voice." Mimeo, Cornell University.

Fudenberg, D., and J. Tirole. 1991. "Perfect Bayesian Equilibrium and Sequential Equilibrium." *Journal of Economic Theory* 52:236—60.

Harsanyi, J. 1967. "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, Parts I, II, and III." Management Science 14:159—82, 320—34, 486—502.

Kennan, J., and R. Wilson. 1992. "Bargaining with Private Information." Forthcoming in *Journal of Economic Literature*.

Kohlberg, E., and J.-F. Mertens. 1986. "On the Strategic Stability of Equilibria." *Economietrica*. 54:1003—38.

Kreps, D., and R. Wilson. 1982. "Sequential Equilibrium." *Econometrica* 50:863—94.

Kreps, D., P. Milgrom, J. Roberts, and R. Wilson. 1982. "Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisoners' Dilemma." *Journal of Economic theory* 27:245—52.

Leland, H., and D. Pyle. 1977. "Information Asymmetries, Financial Structure, and Financial Intermediation." *Journal of Finance* 32:371—87.

Matthews, S. 1989. "Veto Threats: Rhetoric in a Bargaining Game." *Quarterly Journal of Economics* 104:347—69.

Milgrom, P., and J. Roberts, 1982. "Limit Pricing and Entry under

Incomplete Information: An Equilibrium Analysis." *Econometrica* 40:443—59.

Mincer, J. 1974. *Schooling, Experience, and Earnings*. New York: Columbia University Press for the NBER.

Myers, S., and N. Majluf. 1984. "Corporate Financing and Investment Decisions When Firms Have Information that Investors Do Not Have." *Journal of Financial Economics* 13:187—221.

Nalebuff, B. 1987. "Credible Pretrial Negotiation." *Rand Journal of Economics* 18:198—210.

Noldeke, G., and E. van. Damme. 1990. "Signaling in a Dynamic Labour Market." *Review of Economic Studies* 57:1—23.

Rogoff, K. 1989. "Reputation, Coordination, and Monetary Policy." In *Modern Business Cycle theory*. R. Barro, ed. Cambridgr: Harvard University Press.

Samuelson, W. 1984. "Bargaining Under Asymmetric Information." *Econometrica* 52:995—1005.

Sobel, J. 1985. "A Theory of Credibility." *Review of Economic Studies* 52:557—73.

Sobel, J., and I. Takahashi. 1983. "A Multistage Model of Bargaining." *Review of Economic Studies* 50:411—26.

Spence, A. M. 1973. "Job Market Signaling." *Quarterly Journal of Economics* 87:355—74.

Spence, A. M. 1974. "Competitive and Optimal Responses to Signaling: An Analysis of Efficiency and Distribution." *Journal of Economic Theory* 8:296—332.

Stein, J. 1989. "Cheap Talk and the Fed: A Theory of Imprecise Policy Announcements." *American Economic Review* 79:32—42.

Vickers, J. 1986. "Signaling in a Model of Monetary Policy with Incomplete Information." *Oxford Economic Papers* 38:443—55.